Definice 5.1 (Heineho definice limity). Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem D. Řekneme, že funkce f má **limitu** $b \in \mathbb{R}^*$ v bodě x_0, jestliže pro <u>každou</u> posloupnost (x_n) platí

$$\Big(\big(\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \in D \;\wedge\; x_n \neq x_0 \big) \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Big) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$$

a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$.

Definice 5.2. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem D. Řekneme, že

a) funkce f má **limitu zprava** $b \in \mathbb{R}^*$ v bodě x_0, jestliže pro <u>každou</u> posloupnost (x_n) platí

$$\Big(\big(\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \in D \;\wedge\; x_n > x_0 \big) \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Big) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$$

a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b$ nebo $f(x_0+) = b$,

b) funkce f má **limitu zleva** $b \in \mathbb{R}^*$ v bodě x_0, jestliže pro <u>každou</u> posloupnost (x_n) platí

$$\Big(\big(\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \in D \;\wedge\; x_n < x_0 \big) \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Big) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$$

a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = b$ nebo $f(x_0-) = b$.

Věta 5.1 (jednoznačnost limity). Každá funkce má v bodě nejvýše jednu limitu (limitu zprava, limitu zleva).

Věta 5.2. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}^*$ platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b$.

Věta 5.3 (algebra limit). Mějme dány funkce f a g, které mají stejný definiční obror D a mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$, pokud je pravá strana definována,

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$, pokud je pravá strana definována,

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, pokud $\forall x \in D : \; g(x) \neq 0$ a pokud je pravá strana definována.

Věta 5.4 (o sevření). Mějme dány funkce f, g, h se stejným definičním oborem D a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Dále předpokládejme, že platí

a) $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \cap P(x_0, \delta):\ f(x) \le g(x) \le h(x)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

Potom *sevřená* funkce g má také limitu v bodě x_0 a platí $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

Věta 5.5. Mějme dány funkce f, g se stejným definičním oborem D a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Jestliže je funkce g omezená a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Věta 5.6. Mějme dány dvě funkce f a g tak, že $H(g) \subset D(f)$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takový, že platí

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^*$,

b) $\lim\limits_{y \to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$,

c) $f(a) = b$ nebo $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D(g) \cap P(x_0, \delta):\ g(x) \ne a$.

Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = b.$$

Poznámka (limity některých funkcí).

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$,

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{argsinh} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{argtgh} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Definice 5.3. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$, bod $x_0 \in D$, který je hromadným bodem D. Řekneme, že

a) funkce f je **spojitá v bodě** x_0, pokud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

b) funkce f je **spojitá zleva v bodě** x_0, pokud $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$,

c) funkce f je **spojitá zprava v bodě** x_0, pokud $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Pokud $x_0 \in D$ je izolovaným bodem D, potom funkce f je **spojitá v bodě** x_0.

Definice 5.4. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který $\exists\, \delta > 0 : \; P(x_0, \delta) \subset D$.

Bod x_0 je **bod nespojitosti** funkce f, pokud funkce f v bodě x_0 není spojitá. Dále řekneme, že

a) x_0 je **bodem odstranitelné nespojitosti** funkce f, pokud existuje <u>vlastní</u> limita funkce f v bodě x_0 a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \qquad (\text{ včetně případu, kdy } x_0 \notin D\ ),$$

b) x_0 je **bodem nespojitosti I. druhu** funkce f, pokud existují <u>vlastní</u> jednostranné limity funkce f v x_0 a

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x) \qquad (\text{ rozdíl } \lim_{x \to x_0+} f(x) - \lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{je tzv. } \textbf{skok} \text{ funkce } f \text{ v bodě } x_0\ ),$$

c) x_0 je **bodem nespojitosti II. druhu** funkce f, pokud neexistuje <u>vlastní</u> limita zleva nebo <u>vlastní</u> limita zprava funkce f v bodě x_0.

Věta 5.7. Každá z následujících funkcí je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru:

a) $y = x^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $\quad y = \sqrt[n]{x}$ pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, $\quad y = x^a$ pro $a \in \mathbb{R}$,

b) $y = a^x$ a $y = \log_a x$ pro $a > 0,\ a \neq 1$,

c) $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$, $\quad y = \operatorname{tg} x$, $\quad y = \operatorname{cotg} x$,

d) $y = \sinh x$, $\quad y = \cosh x$, $\quad y = \operatorname{tgh} x$, $\quad y = \operatorname{cotgh} x$,

e) $y = \arcsin x$, $\quad y = \arccos x$, $\quad y = \operatorname{arctg} x$, $\quad y = \operatorname{arccotg} x$,

f) $y = \operatorname{argsinh} x$, $\quad y = \operatorname{argcosh} x$, $\quad y = \operatorname{argtgh} x$, $\quad y = \operatorname{argcotgh} x$.

Věta 5.8. Mějme dány funkce f a g, které mají stejný definiční obor D a které jsou spojité v bodě $x_0 \in D$. Potom jsou v bodě x_0 spojité funkce $f + g$, $f \cdot g$ a $\dfrac{f}{g}$ (pokud $\forall x \in D : \; g(x) \neq 0$).

Věta 5.9. Mějme dánu funkci dánu g, která je spojitá v bodě x_0. Dále mějme dánu funkci f, která je spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$.

Potom složená funkce $h = f \circ g$ je spojitá v bodě x_0.

Definice 5.5. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a interval $I \subset D$. Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý (pravý) koncový bod tohoto intervalu do I, je v něm spojitá zprava (zleva).

Věta 5.10 (Cauchyova věta). Mějme dánu funkci f, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ a pro kterou platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje $\xi \in (a; b)$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Věta 5.11 (Weierstrassova věta). Mějme dánu funkci f, která je spojitá na uzavřeném intervalu.
Potom funkce f je na tomto intervalu omezená a nabývá na něm své nejmenší a největší funkční hodnoty.

Věta 5.12 (Bolzanova věta). Mějme dánu funkci f, která je spojitá na uzavřeném intervalu.
Potom funkce f na tomto intervalu nabývá všech mezihodnot mezi svou nejmenší a největší funkční hodnotou.