Definice 6.1. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in D$ takové, že $\exists\,\delta > 0 :\ (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$. Řekneme, že funkce f má **derivaci v bodě** x_0, pokud existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Poznámka. Funkce f má derivaci v bodě x_0 právě tehdy, když existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Věta 6.1. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, potom je v tomto bodě spojitá.

Poznámka.

a) **Tečna ke grafu** funkce f v bodě x_0:

$$\begin{aligned} &y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) && \text{pokud } f'(x_0) \in \mathbb{R},\\ &x = x_0 && \text{pokud } f'(x_0) = \pm\infty \text{ a } f \text{ je spojitá v } x_0. \end{aligned}$$

b) **Normála ke grafu** funkce f v bodě x_0:

$$\begin{aligned} &y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) && \text{pokud } f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ a } f'(x_0) \neq 0,\\ &x = x_0 && \text{pokud } f'(x_0) = 0,\\ &y = f(x_0) && \text{pokud } f'(x_0) = \pm\infty \text{ a } f \text{ je spojitá v } x_0. \end{aligned}$$

Věta 6.2. Mějme dány funkce f a g se stejným definičním oborem D, které mají vlastní derivaci v bodě $x_0 \in D$. Potom platí

a) $(c \cdot f)'(x_0) = cf'(x_0)$ pro každé $c \in \mathbb{R}$,

b) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, pokud $\forall\, x \in D :\ g(x) \neq 0$.

Věta 6.3. Mějme dánu funkci g, která má vlastní derivaci v bodě x_0, a funkci f, která má vlastní derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$. Potom složená funkce $h = f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Věta 6.4. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která je prostá. Dále předpokládejme, že funkce f je spojitá a ostře monotónní na intervalu $I \subset D$, y_0 je vnitřní bod intervalu $f(I)$ a existuje vlastní derivace $f'(x_0) \neq 0$, kde $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Potom platí

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Definice 6.2. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in D$ takový, že $\exists\, \delta > 0 :\ (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$. Řekneme, že

a) funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, pokud $\forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) :\ f(x_0) \leq f(x)$,

b) funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, pokud $\forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) :\ f(x_0) \geq f(x)$,

c) funkce f má v bodě x_0 **lokální extrém**, pokud má v x_0 lokální minimum nebo lokální maximum,

d) funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální minimum**, pokud $\forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} :\ f(x_0) < f(x)$,

e) funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**, pokud $\forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} :\ f(x_0) > f(x)$,

f) funkce f má v bodě x_0 **ostrý lokální extrém**, pokud má v x_0 ostré lokální minimum nebo ostré lokální maximum.

Definice 6.3. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in D$. Řekneme, že

a) funkce f má v bodě x_0 **globální minimum**, pokud $\forall\, x \in D :\ f(x_0) \leq f(x)$,

b) funkce f má v bodě x_0 **globální maximum**, pokud $\forall\, x \in D :\ f(x_0) \geq f(x)$,

c) funkce f má v bodě x_0 **globální extrém**, pokud má v x_0 globální minimum nebo globální maximum.

Jsou-li nerovnosti ostré pro $x \neq x_0$, hovoříme o **ostrých globálních extrémech** (o **ostrém globálním minimu** a **ostrém globálním maximu**).

Věta 6.5 (Fermatova věta). Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě její derivace $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Definice 6.4. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in D$.

Řekneme, že bod x_0 je **stacionárním bodem** funkce f, pokud $f'(x_0) = 0$.

Věta 6.6 (Rolleova věta). Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle \subset D$, má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$ a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a; b)$ takové, že platí

$$f'(c) = 0.$$

Věta 6.7 (Lagrangeova věta). Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle \subset D$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$. Potom existuje $c \in (a; b)$ takové, že platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 6.8. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci na otevřeném intervalu $I \subset D$.

a) Je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in I$, potom f je konstantní na I.

b) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$, potom f je rostoucí na I.

c) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$, potom f je klesající na I.

Ostré nerovnosti implikují ostrou monotónii.

Věta 6.9 (Cauchyova věta). Mějme dány funkce $f : D \to \mathbb{R}$ a $g : D \to \mathbb{R}$, které jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle \subset D$ a mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$. Potom existuje $c \in (a; b)$ takové, že platí

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Věta 6.10 (l'Hospitalovo pravidlo). Mějme dány funkce $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takový, že

a) $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \right)$ nebo $\left(\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty \right)$,

b) existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ existují vlastní derivace $f'(x)$ a $g'(x) \neq 0$,

c) existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Definice 6.5. Mějme dánu funkci $f : D \to \mathbb{R}$.

a) (**První**) **derivace funkce** f je funkce $f' : \ x \mapsto f'(x), \quad D(f') = \{x \in D(f) : \ \exists\, f'(x) \in \mathbb{R}\}$.

b) Funkce f má **druhou derivaci v bodě** x_0, pokud $\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D(f')$ a existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0).$$

c) **Druhá derivace funkce** f je funkce $f'' : \ x \mapsto f''(x), \quad D(f'') = \{x \in D(f') : \ \exists\, f''(x) \in \mathbb{R}\}$.

Poznámka. Analogicky definujeme **třetí derivaci** f''' funkce f , **čtvrtou derivaci** $f^{(4)}$ funkce f, atd.

Věta 6.11. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která má vlastní druhou derivaci na otevřeném intervalu $I \subset D$.

a) Je-li $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$, potom f je konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$, potom f je konkávní na I.

Ostré nerovnosti implikují ostrou konvexitu a ostrou konkávitu.

Poznámka (derivace základních funkcí).

1. $(x^a)' = a.x^{\alpha-1}, \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & a \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}) \\ x > 0, & a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \end{cases}$

2. $(e^x)' = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \qquad x > 0,$

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$

6. $(\sin x)' = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R},$

7. $(\cos x)' = -\sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$

9. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1,$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1,$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$

13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$

14. $(\sinh x)' = \cosh x, \qquad x \in \mathbb{R},\ \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$

15. $(\cosh x)' = \sinh x, \qquad x \in \mathbb{R},\ \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$

16. $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x},$

17. $(\operatorname{cotgh} x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}, \qquad x \neq 0,\ \operatorname{cotgh} x := \frac{\cosh x}{\sinh x},$

18. $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$

19. $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1,$

20. $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \qquad |x| < 1,$

21. $(\operatorname{argcotgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \qquad |x| > 1,$