Integrální počet - neurčité integrály

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Petr Nečesal

Katedra matematiky FAV ZČU

pnecesal@kma.zcu.cz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

přednášky z matematické analýzy

prosinec 2019

integrování je opačná operace k derivování

$F(x)$	derivování	$F'(x) = f(x)$	derivování	$f'(x)$
$\frac{1}{2}x^2$	$\longrightarrow$	x	$\longrightarrow$	1
$\frac{1}{3}x^3$	$\longrightarrow$	x^2	$\longrightarrow$	$2x$
$\operatorname{arctg} x$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\longrightarrow$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
$-\cos x$	$\longrightarrow$	$\sin x$	$\longrightarrow$	$\cos x$
$-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$\longrightarrow$	$\sin(2x)$	$\longrightarrow$	$2\cos(2x)$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x$	$\longrightarrow$	$\sin^2 x$	$\longrightarrow$	$2\sin x \cdot \cos x$
? ? ?	$\longrightarrow$	$\sin x^2$	$\longrightarrow$	$2x \cdot \cos x^2$

antiderivace = primitivní funkce

Definice (primitivní funkce): Mějme funkci f a interval $(a,b) \subset D(f)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Funkce F je <u>primitivní funkcí</u> k funkci f na (a,b), pokud

$$\forall\, x \in (a,b): \quad F'(x) = f(x)$$

$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$F_1(x) = \ln x$ pro $x > 0$

$F_1'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x)$

F_1 je primitivní funkcí k f na $(0, +\infty)$

$F_2(x) = \ln(-x)$ pro $x < 0$

$F_2'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = f(x)$

F_2 je primitivní funkcí k f na $(-\infty, 0)$

základní vlastnosti

Věta: Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b), potom platí:

1) F je spojitá na (a,b).
2) Funkce $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, je primitivní funkcí k f na (a,b).
3) Je-li G primitivní funkcí k f na (a,b), potom

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad G(x) = F(x) + C$$

add 1) $\forall x \in (a,b): \quad F'(x) = f(x) \in \mathbb{R}$

add 2) $\forall x \in (a,b): \quad G'(x) = (F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$

add 3) $\forall x \in (a,b): \quad H(x) = G(x) - F(x)$

$$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$H'(x) = 0$$

$$\exists C \in \mathbb{R} \ \forall x \in (a,b): \quad H(x) = C$$

Definice (neurčitý integrál): Mějme funkci f a interval $(a,b) \subset D(f)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Funkce f je <u>integrovatelná</u> na (a,b), pokud

$\exists$ primitivní funkce F k funkci f na (a,b).

<u>Neurčitý integrál</u> funkce f na (a,b) je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{ F(x) + C : \ C \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{a píšeme} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C, \quad \int x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + C, \quad \int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Jak zajistit integrovatelnost funkce?

Věta (postačující podmínka integrovatelnosti):

f je spojitá na (a,b) $\Longrightarrow$ f je integrovatelná na (a,b)

Implikaci nelze obrátit!

Existují funkce, které jsou integrovatelné a zároveň nejsou spojité na (a,b)! Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \end{cases}$$

je integrovatelná na $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, neboť funkce

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \end{cases}$$

je její primitivní funkcí na $\mathbb{R}$. Funkce f však není spojitá v bodě $x = 0$!

integrování součtu a c-násobku funkcí

Věta (linearita neurčitého integrálu): Mějme funkce f a g, které jsou spojité na intervalu (a,b). Potom na (a,b) platí

(1) $$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } c \neq 0$$

add (1) $$F(x)+G(x)+C = \big(F(x)+C_1\big) + \big(G(x)+C_2\big), \qquad C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

add (2) $$c\cdot F(x)+C = c\cdot\big(F(x)+C_1\big) \qquad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

integrování součinu funkcí po částech

Věta (integrace per-partes): Mějme funkce u a v, které mají spojité derivace na intervalu (a,b). Potom na (a,b) platí

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = x\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) - \int 1\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

integrování součinu funkcí po částech

Věta (integrace per-partes): Mějme funkce u a v, které mají spojité derivace na intervalu (a,b). Potom na (a,b) platí

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(x)\cdot v(x) \;-\; \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\big(u(x)\cdot v(x)\big)' &= u'(x)\cdot v(x) \;+\; u(x)\cdot v'(x)\\
\int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,\mathrm{d}x &= \int \big(u'(x)\cdot v(x) \;+\; u(x)\cdot v'(x)\big)\,\mathrm{d}x\\
\int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,\mathrm{d}x &= \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x\\
u(x)\cdot v(x)+C_0 &= F_1(x)+C_1 \;+\; F_2(x)+C_2\\
u(x)\cdot v(x)-\big(F_1(x)+C_1-C_0\big) &= F_2(x)+C_2\\
u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x &= \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

integrování pomocí substituce

Věta (1.substituční metoda): Mějme funkci $g : y = g(x)$, která má spojitou derivaci na intervalu (a, b). Dále mějme funkci $f : z = f(y)$, která je spojitá na intervalu $(c, d) \supset H(g)$. Potom na (a, b) platí

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(y)\, \mathrm{d}y$$

$$\int \mathrm{e}^{x^2} \cdot (2x)\, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{y}\, \mathrm{d}y$$

integrování pomocí substituce

Věta (1.substituční metoda): Mějme funkci $g: y = g(x)$, která má spojitou derivaci na intervalu (a, b). Dále mějme funkci $f: z = f(y)$, která je spojitá na intervalu $(c, d) \supset H(g)$. Potom na (a, b) platí

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
\int f(y)\,\mathrm{d}y &= F(y) + C \\
\big(F(g(x))\big)' &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\big(F(g(x))\big)' &= f(g(x)) \cdot g'(x) \\
\int \big(F(g(x))\big)'\,\mathrm{d}x &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(g(x)) + C &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\
F(y) + C &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\
\int f(y)\,\mathrm{d}y &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

integrování pomocí substituce

Věta (2.substituční metoda): Mějme funkci $g: y = g(x)$, která má spojitou a nenulovou derivaci na intervalu $(a,b) = D(g)$ a $H(g) = (c,d)$. Dále mějme funkci $f: z = f(y)$, která je spojitá na intervalu (c,d). Potom na (c,d) platí

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \int \sqrt{1-(\sin x)^2}\cdot \cos x\,\mathrm{d}x$$