Integrální počet - určité integrály I

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Petr Nečesal

Katedra matematiky FAV ZČU

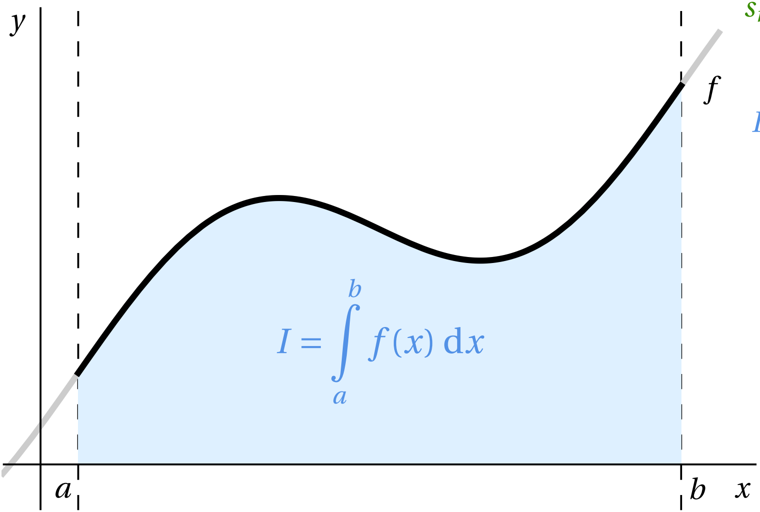
pnecesal@kma.zcu.cz

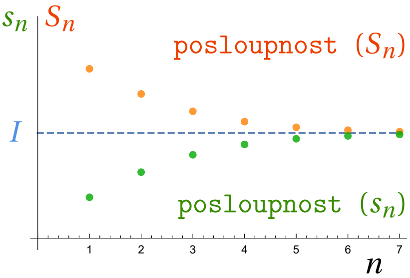
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

přednášky z matematické analýzy

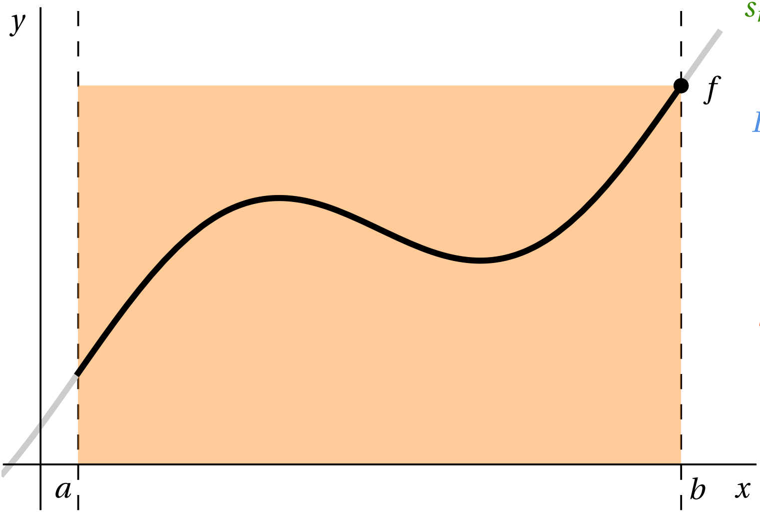
prosinec 2019

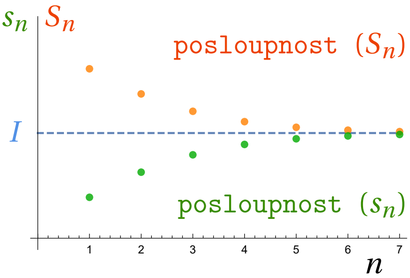
dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet





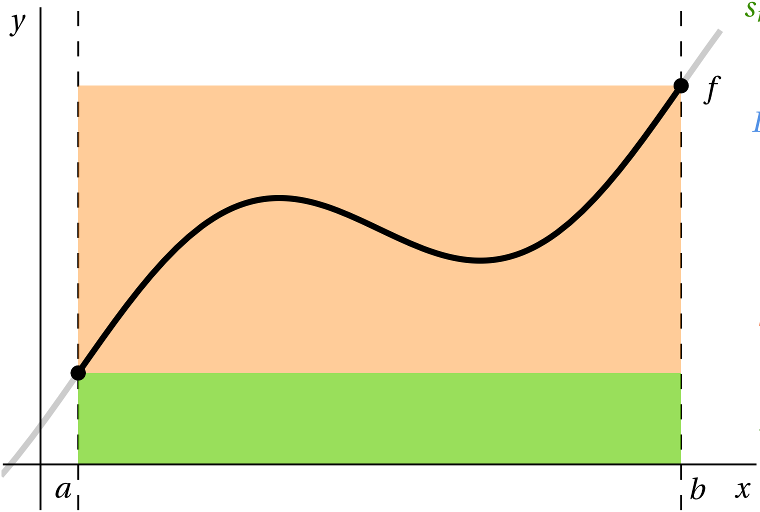
dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

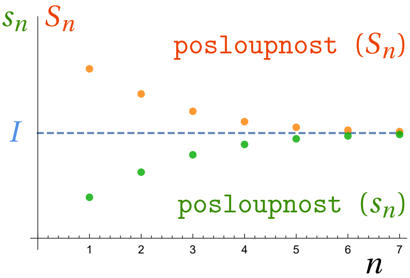




$$S_1 = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\cdot(b-a)$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

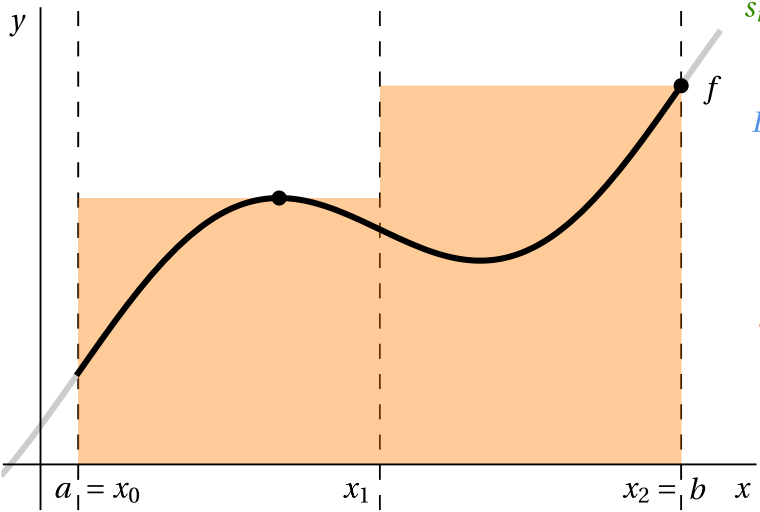


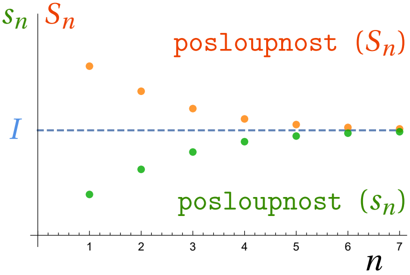


$$S_1 = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a)$$

$$s_1 = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a)$$

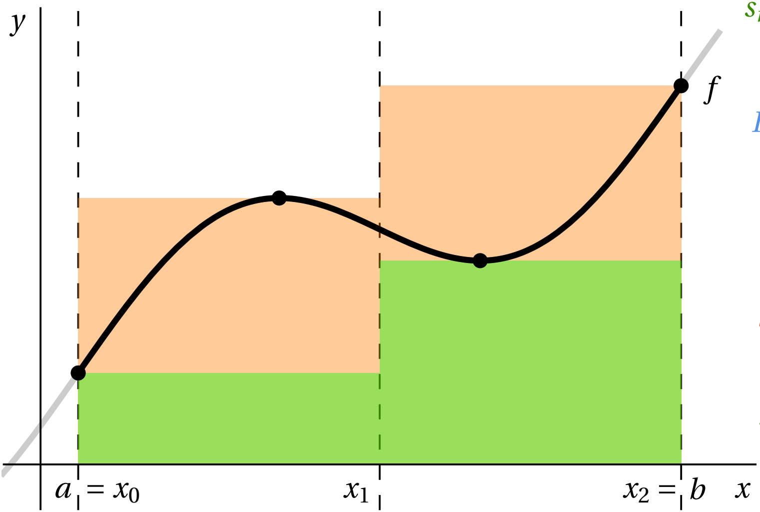
dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

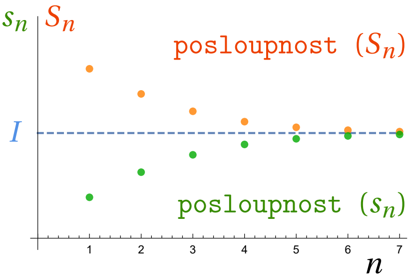




$$S_2 = \sup_{x\in\langle x_0,x_1\rangle} f(x)\cdot(x_1-x_0) \; + \sup_{x\in\langle x_1,x_2\rangle} f(x)\cdot(x_2-x_1)$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

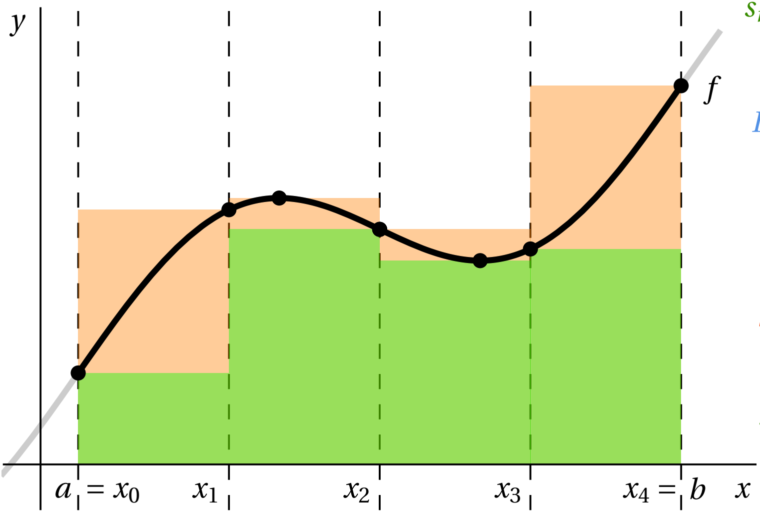


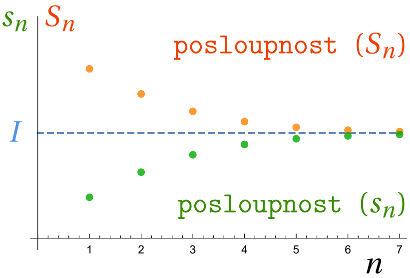


$$S_2 = \sum_{i=1}^{2} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{2} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

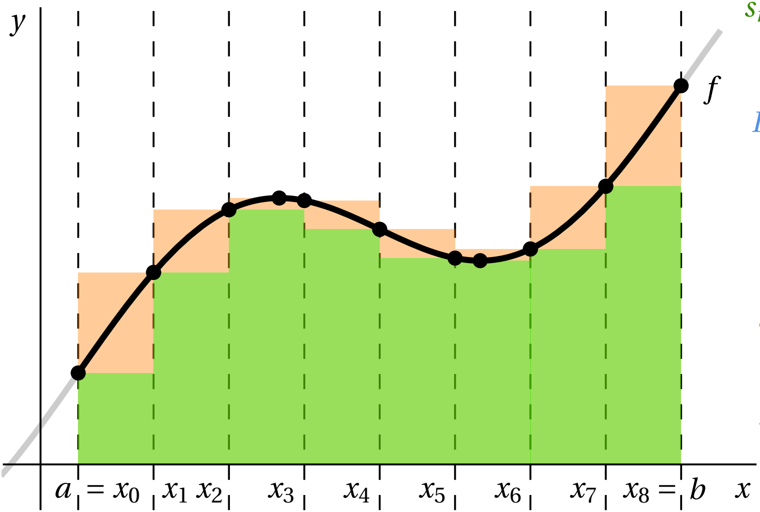


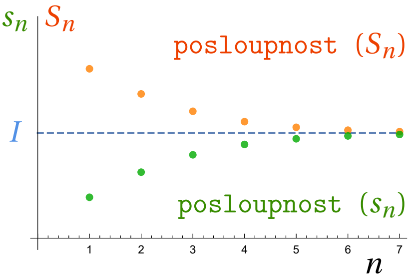


$$S_3 = \sum_{i=1}^{4} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$$s_3 = \sum_{i=1}^{4} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

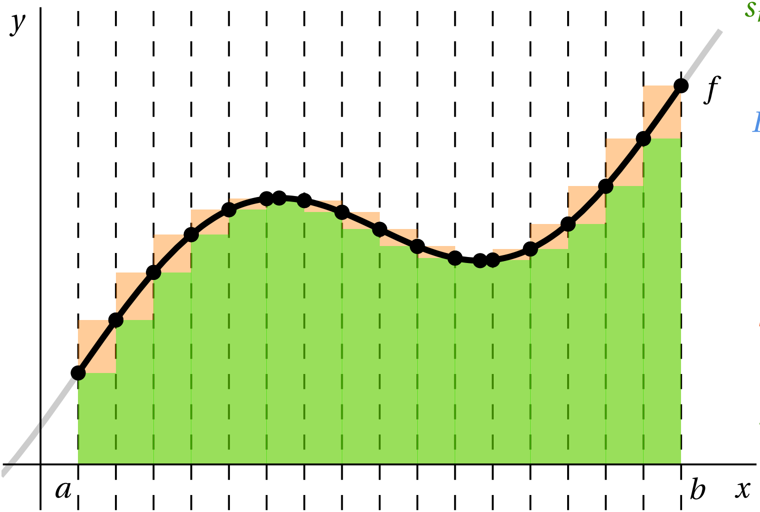


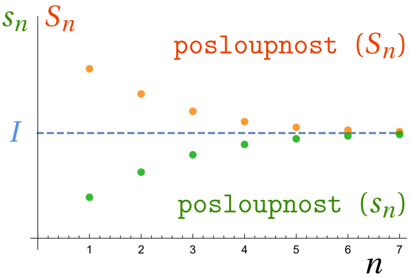


$$S_4 = \sum_{i=1}^{8} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

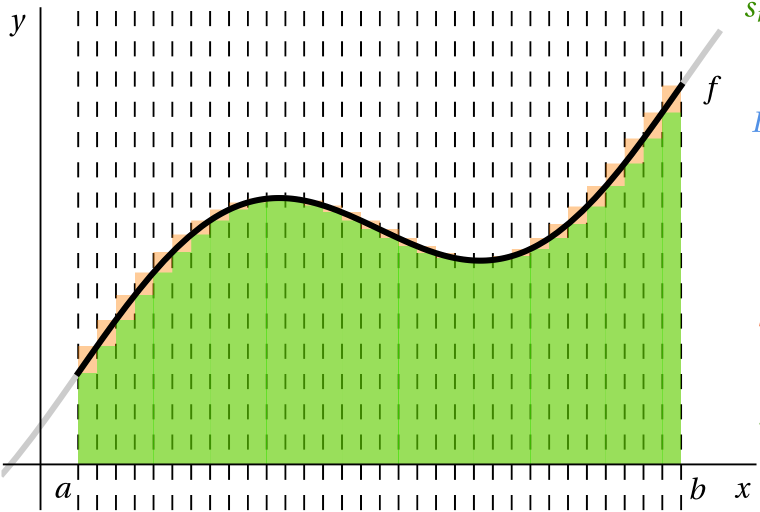


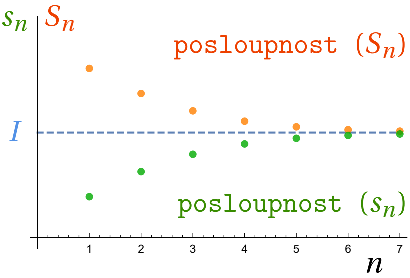


$$S_5 = \sum_{i=1}^{16} \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\cdot\Delta x_i$$

$$s_5 = \sum_{i=1}^{16} \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\cdot\Delta x_i$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet

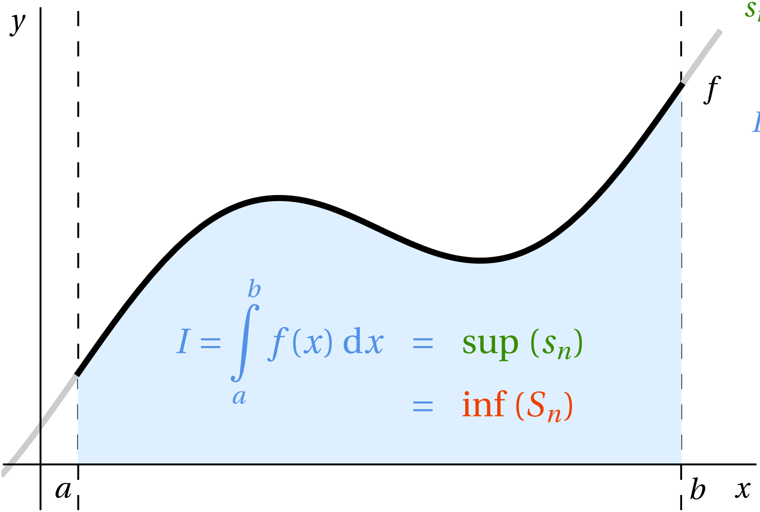




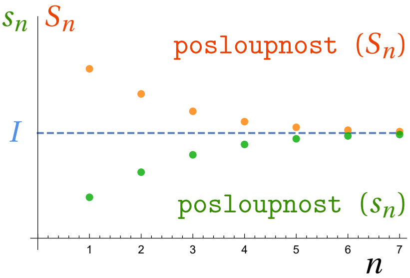
$$S_6 = \sum_{i=1}^{32} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

$$s_6 = \sum_{i=1}^{32} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i$$

dolní integrální součet ≤ určitý integrál ≤ horní integrální součet



$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\,(s_n) = \inf\,(S_n)$$



$$s_n \le S_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$\sup\,(s_n) = \inf\,(S_n)$$

Definice (určitý integrál): Mějme funkci f, která je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle \subset D(f)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Funkce f je (Riemannovsky) integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, pokud

$$\sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$

Určitý integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ je konečné číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$

$$\int_0^1 2\,\mathrm{d}x = 2 \qquad \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \qquad \int_0^1 (-x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2} \qquad \int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 0$$

Definice (určitý integrál): Mějme funkci f, která je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle \subset D(f)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Funkce f je (Riemannovsky) integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, pokud

$$\sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$

Určitý integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ je konečné číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$

Pro $a > b$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Jak zajistit (Riemannovskou) integrovatelnost funkce?

Věta (postačující podmínka integrovatelnosti):

$$f \text{ je spojitá na } \langle a,b\rangle \implies f \text{ je integrovatelná na } \langle a,b\rangle$$

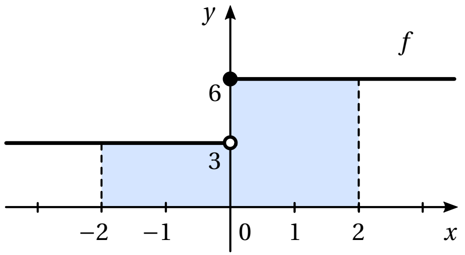
Implikaci nelze obrátit!

Existují funkce, které jsou integrovatelné a zároveň <u>nejsou</u> spojité na $\langle a,b\rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{pro } x \geq 0, \\ 3 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

<u>není</u> spojitá v bodě $x = 0$,
ale je integrovatelná na $\langle -2,2\rangle$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3 + 2\cdot 6 = 18$$



Jak zajistit (Riemannovskou) integrovatelnost funkce?

Věta (postačující podmínka integrovatelnosti):

f je spojitá na $\langle a,b\rangle \implies f$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$

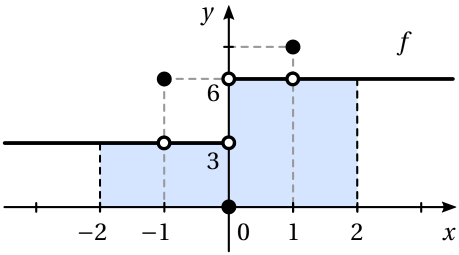
Implikaci nelze obrátit!

Existují funkce, které jsou integrovatelné a zároveň nejsou spojité na $\langle a,b\rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{pro } x \geq 0, \\ 3 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x=0$,
ale je integrovatelná na $\langle -2,2\rangle$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3 + 2\cdot 6 = 18$$



Jak zajistit (Riemannovskou) integrovatelnost funkce?

Věta (postačující podmínka integrovatelnosti):

$$f \text{ je spojitá na } \langle a,b\rangle \quad \Longrightarrow \quad f \text{ je integrovatelná na } \langle a,b\rangle$$

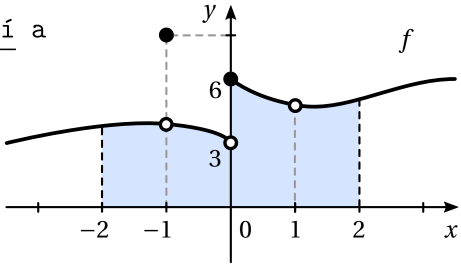
Předpoklad spojitosti ve Větě lze oslabit:

Je-li funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$ až na

konečný počet bodů odstranitelných nespojitostí a

konečný počet bodů nespojitostí I. druhu,

potom je f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.



o vztahu určitého a neurčitého integrálu

Věta (Newtonova-Leibnizova formule): Mějme funkci f, která je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Dále mějme funkci F, která je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a je primitivní funkcí k f na (a,b):

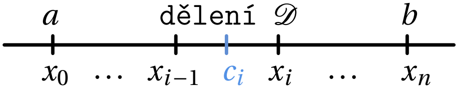
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = -\cos\pi+\cos 0 = 2$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$



$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\
&= F(x_n) \underbrace{-F(x_{n-1}) + F(x_{n-1})}_{=0} - \dots \underbrace{-F(x_i) + F(x_i)}_{=0} - \dots \underbrace{-F(x_1) + F(x_1)}_{=0} - F(x_0) \\
&= \Big[F(x_n) - F(x_{n-1})\Big] + \Big[F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\Big] + \dots + \Big[F(x_1) - F(x_0)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[F(x_i) - F(x_{i-1})\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[f(c_i) \cdot \Delta x_i\Big]
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big[\inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i\Big]}_{=s(\mathscr{D})} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big[f(c_i) \cdot \Delta x_i\Big]}_{=F(b)-F(a)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big[\sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot \Delta x_i\Big]}_{=S(\mathscr{D})}$$

$$\sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) \le F(b) - F(a) \le \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$

integrování součtu a c-násobku funkcí

Věta (linearita určitého integrálu): Mějme funkce f a g, které jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí

(1) $$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int_a^b c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } c\in\mathbb{R}$$

add (1) $$\Big(F(b)+G(b)\Big)-\Big(F(a)+G(a)\Big) = \Big(F(b)-F(a)\Big) + \Big(G(b)-G(a)\Big)$$

add (2) $$c\cdot F(b)-c\cdot F(a) = c\cdot\Big(F(b)-F(a)\Big)$$

integrování součinu funkcí po částech

Věta (integrace per-partes): Mějme funkce u a v, které mají spojité derivace na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a) \;-\; \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; 1\cdot\left(-\tfrac{1}{\mathrm{e}}\right) - 0\cdot(-1) \;-\; \int_0^1 1\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

integrování součinu funkcí po částech

Věta (integrace per-partes): Mějme funkce u a v, které mají spojité derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\big(u(x)\cdot v(x)\big)' &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\\
\int_a^b \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\big)\,\mathrm{d}x\\
u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) &= \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x\\
u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

integrování pomocí substituce

Věta (substituční metoda): Mějme funkci $g: y = g(x)$, která má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dále mějme funkci $f: z = f(y)$, která je spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle \supset H(g)$. Potom platí

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, \mathrm{d}y$$

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2} \cdot (2x)\, \mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{e}^{y}\, \mathrm{d}y$$

integrování pomocí substituce

Věta (substituční metoda): Mějme funkci $g: y = g(x)$, která má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dále mějme funkci $f: z = f(y)$, která je spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle \supset H(g)$. Potom platí

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\big(F(g(x))\big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\big(F(g(x))\big)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int_a^b \big(F(g(x))\big)'\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$