Integrální počet - určité integrály II

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

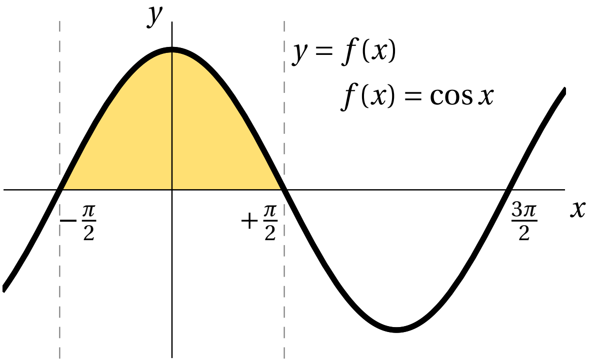
Petr Nečesal

Katedra matematiky FAV ZČU

pnecesal@kma.zcu.cz

přednášky z matematické analýzy

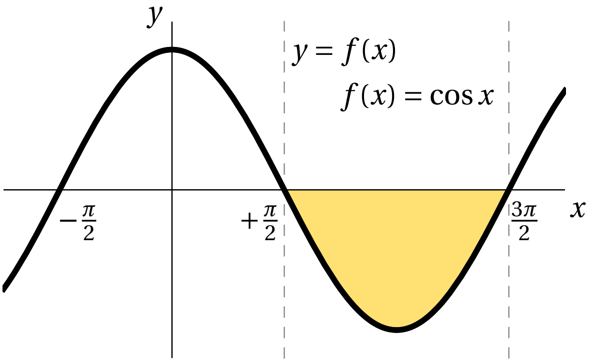
prosinec 2019



- určitý integrál je číslo $I \in \mathbb{R}$
- posloupnosti integrálních součtů
- Newtonova-Leibnizova formule

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = I_2 = \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x \Big]_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = -2$$



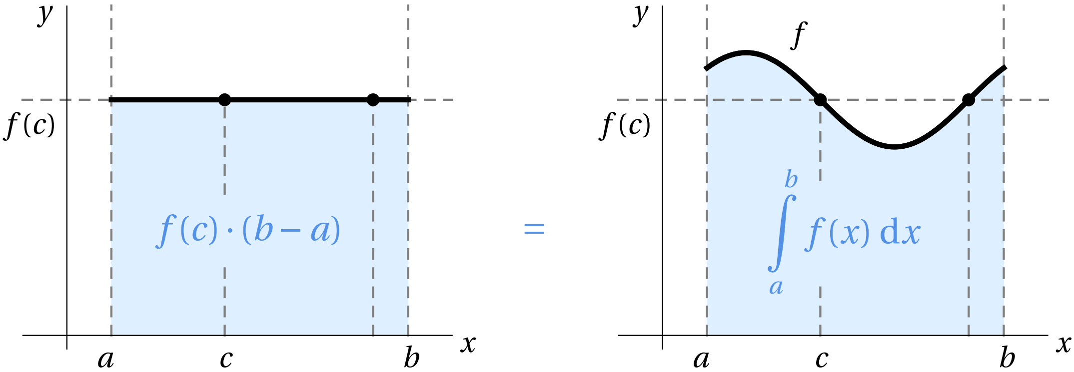
- určitý integrál je číslo $I \in \mathbb{R}$
- posloupnosti integrálních součtů
- Newtonova-Leibnizova formule

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -2$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = I_4 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x \Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 2$$

Věta (o střední hodnotě): Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\exists c \in (a,b): \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Věta (o střední hodnotě): Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\exists c \in (a,b): \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Díky Lagrangeově větě o střední hodnotě pro primitivní funkci F máme

$$\exists c \in (a,b): \quad F'(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \Big(F(b) - F(a)\Big) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

kde jsme použili Newtonovu-Leibnizovu formuli.

Věta (nezápornost a monotonie integrálu): Jsou-li funkce f a g spojité na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\Big(\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle :\quad 0 \ \le\ f(x)\ \Big) \quad\Longrightarrow\quad 0 \ \le\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\Big(\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle :\ g(x) \ \le\ f(x)\ \Big) \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \le\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

add (1): díky větě o střední hodnotě máme

$$\exists\, c \in (a, b) :\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ =\ \underbrace{f(c)}_{\ge 0}\cdot\underbrace{(b-a)}_{\ge 0} \ \ge\ 0$$

Věta (nezápornost a monotonie integrálu): Jsou-li funkce f a g spojité na $\langle a,b\rangle$, potom

$$\Big(\forall\, x \in \langle a,b\rangle : \quad 0 \;\le\; f(x) \Big) \;\Longrightarrow\; 0 \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

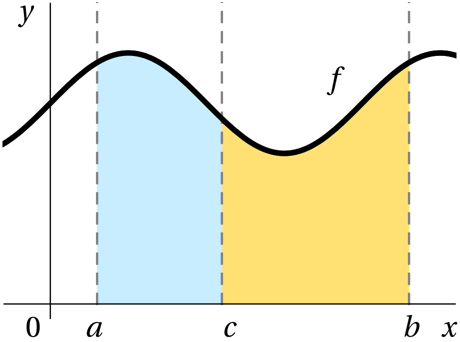
$$\Big(\forall\, x \in \langle a,b\rangle : \; g(x) \;\le\; f(x) \Big) \;\Longrightarrow\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

add (2): $\forall\, x \in \langle a,b\rangle : \; 0 \;\le\; f(x) - g(x)$

$$0 \;\le\; \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x, \quad 0 \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Věta (aditivita určitého integrálu): Je-li f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, potom platí

$$\forall\, c \in (a,b): \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

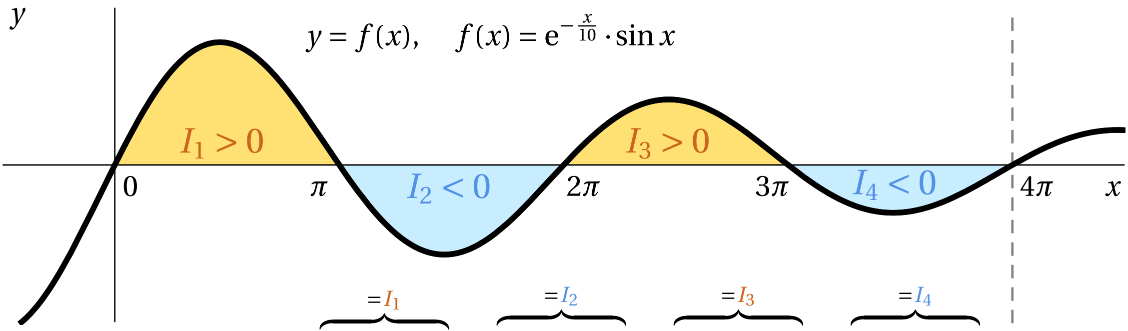


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(c)$$

obsah plochy, která je vymezena grafem funkce a osou x

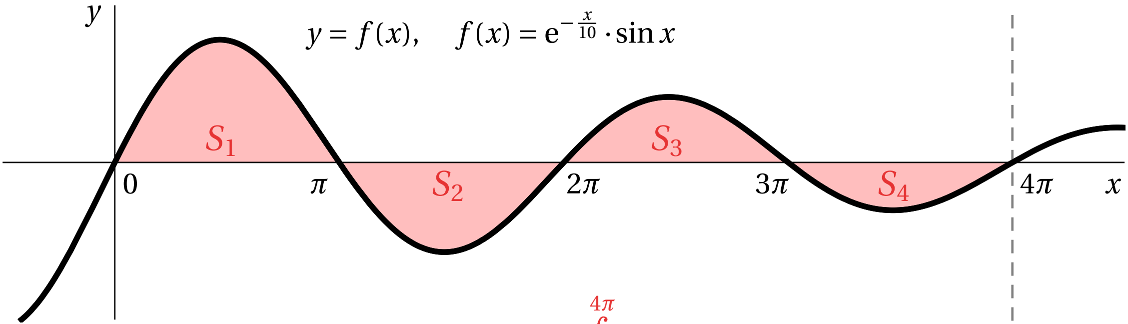


$$I = \int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \overbrace{\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}^{=I_1} + \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}^{=I_2} + \overbrace{\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}^{=I_3} + \overbrace{\int_{3\pi}^{4\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}^{=I_4}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

obsah $S = I_1 - I_2 + I_3 - I_4$

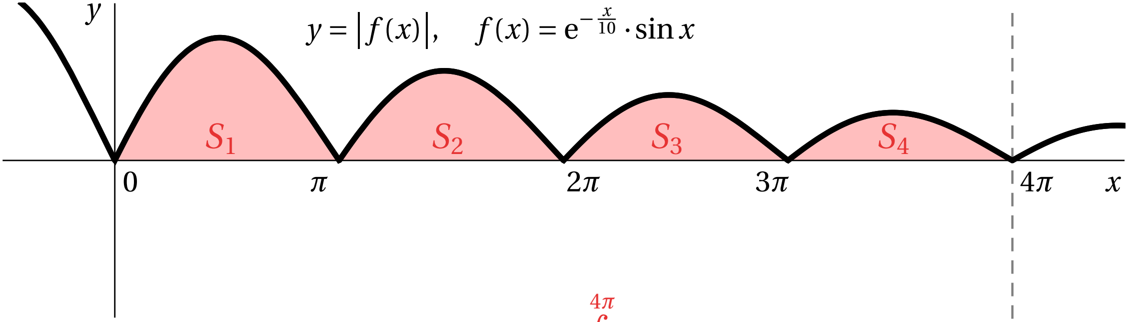
obsah plochy, která je vymezena grafem funkce a osou x



obsah $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \displaystyle\int_0^{4\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{=|f(x)|}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{(-f(x))}_{=|f(x)|}\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} \underbrace{f(x)}_{=|f(x)|}\,\mathrm{d}x + \int_{3\pi}^{4\pi} \underbrace{(-f(x))}_{=|f(x)|}\,\mathrm{d}x$$

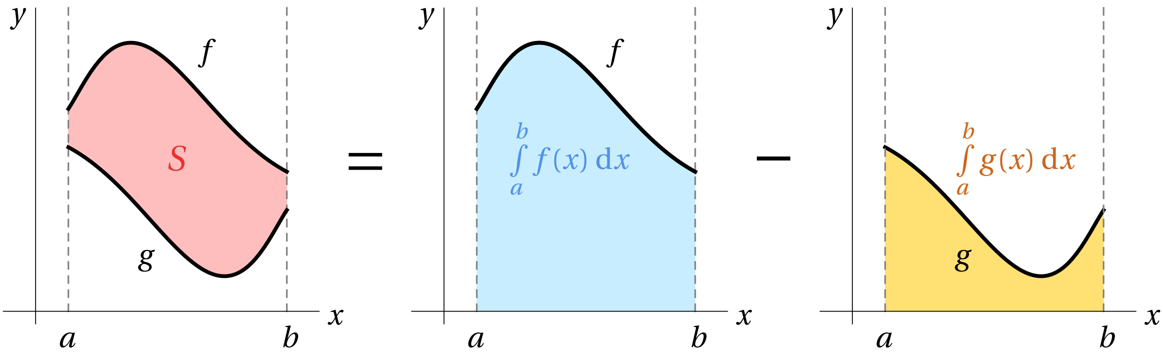
obsah plochy, která je vymezena grafem funkce a osou x



obsah $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \int_0^{4\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x$

$$S > S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = \int_0^{4\pi} f(x) \,\mathrm{d}x$$

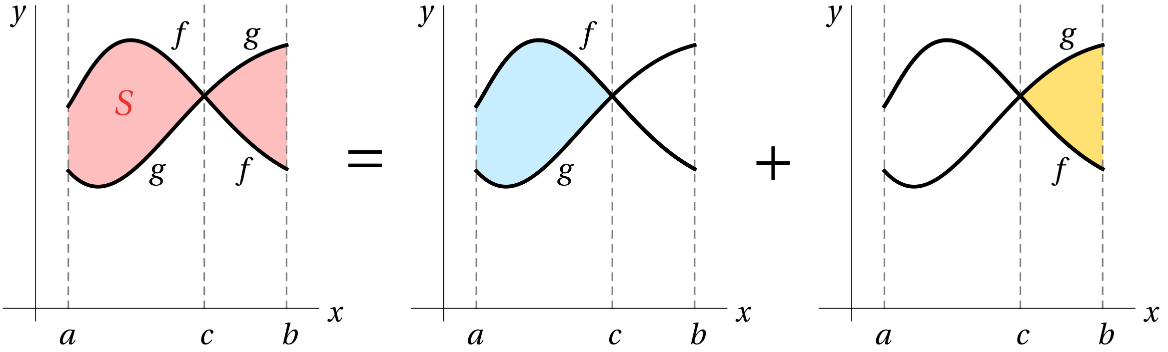
obsah plochy, která je vymezena grafy funkcí f a g ($g(x) \leq f(x)$)



$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$$S = (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$$

obsah plochy, která je vymezena grafy funkcí f a g

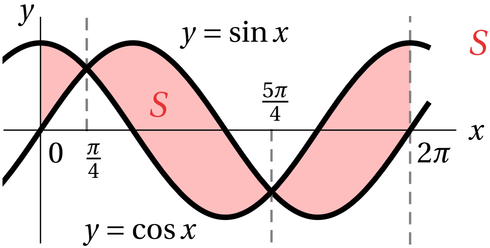


$$S = \int_a^c \underbrace{\big(f(x) - g(x)\big)}_{=\left|f(x)-g(x)\right|} \,\mathrm{d}x + \int_c^b \underbrace{\big(g(x) - f(x)\big)}_{=\left|f(x)-g(x)\right|} \,\mathrm{d}x = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \,\mathrm{d}x$$

obsah plochy mezi grafy funkcí nad intervalem

Věta (obsah plochy): Mějme funkce f a g, které jsou spojité na $\langle a,b\rangle$. Potom pro obsah plochy S, která je vymezená grafy funkcí f a g nad $\langle a,b\rangle$, platí

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$

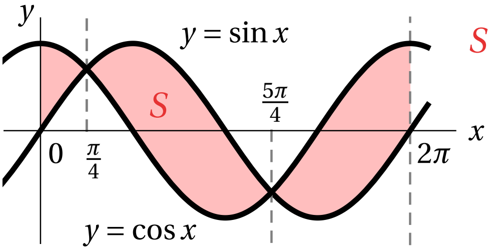


$$S = \int_0^{2\pi} \left|\sin x - \cos x\right| \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sin x - \cos x\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \left(\cos x - \sin x\right) \mathrm{d}x$$

obsah plochy mezi grafy funkcí nad intervalem

Věta (obsah plochy): Mějme funkce f a g, které jsou spojité na $\langle a,b\rangle$. Potom pro obsah plochy S, která je vymezená grafy funkcí f a g nad $\langle a,b\rangle$, platí

$$S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$$



$$S = \int_0^{2\pi} \left|\sin x - \cos x\right| \mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2}$$

určitý integrál s proměnnou horní mezí je primitivní funkce

Věta (integrál s proměnnou mezí): Mějme funkci f, která je spojitá na intervalu $(\alpha,\beta)\subset D(f)$, $-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$. Dále mějme $a\in(\alpha,\beta)$.

Potom pro funkci

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in(\alpha,\beta) \tag{1}$$

platí

$$\forall x\in(\alpha,\beta):\ \ G'(x)=f(x)$$

$$G(x) = \sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = \inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$ pro $a<x$, kde $\mathscr{D}$ je dělění $\langle a,x\rangle$,

$$G(x) = 0$$ pro $a=x$,

$$G(x) = -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\sup_{\mathscr{D}} s(\mathscr{D}) = -\inf_{\mathscr{D}} S(\mathscr{D})$$ pro $x<a$, kde $\mathscr{D}$ je dělění $\langle x,a\rangle$.

určitý integrál s proměnnou horní mezí je primitivní funkce

Věta (integrál s proměnnou mezí): Mějme funkci f, která je spojitá na intervalu $(\alpha,\beta) \subset D(f)$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Dále mějme $a \in (\alpha,\beta)$.

Potom pro funkci

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (\alpha,\beta) \tag{1}$$

platí

$$\forall x \in (\alpha,\beta): \; G'(x) = f(x)$$

Použitím Newtonovy-Leibnizovy formule dostáváme ($C = -F(a)$):

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) &&= F(x) + C && \text{pro } a < x, \\
G(x) &= 0 &&= F(x) + C && \text{pro } a = x, \\
G(x) &= -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = -(F(a) - F(x)) &&= F(x) + C && \text{pro } x < a.
\end{aligned}
$$

Věta (integrální kritérium): Mějme funkci f, která je nezáporná, spojitá a klesající na intervalu $\langle 1, +\infty) \subset D(f)$. Dále mějme posloupnost

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$$