Definice 7.1. Mějme funkce f a F, které jsou definované alespoň na intervalu $(a;b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu $(a;b)$, pokud

$$\forall\, x \in (a;b):\ F'(x) = f(x).$$

Věta 7.1. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(a;b)$. Potom platí:

a) F je spojitá na $(a;b)$.

b) Každá funkce ve tvaru $y = F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$, je primitivní funkcí k funkci f na $(a;b)$.

c) Každá primitivní funkci k funkci f na $(a;b)$ je ve tvaru $y = F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Definice 7.2. Mějme funkci f, která je definovaná alespoň na intervalu $(a;b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Existuje-li primitivní funkce F k funkci f na $(a;b)$, potom říkáme, že funkce f je **integrovatelná** na intervalu $(a;b)$ a **neurčitým integrálem** funkce f na intervalu $(a;b)$ rozumíme množinu <u>všech</u> primitivních funkcí k funkci f na $(a;b)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Big\{F(x) + C:\ C \in \mathbb{R}\Big\} \qquad \Big(\text{píšeme } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\Big).$$

Věta 7.2. Je-li funkce f spojitá na intervalu $(a;b)$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 7.3 (linearita neurčitého integrálu). Mějme funkce f, g, které jsou integrovatelné na intervalu $(a;b)$. Potom na intervalu $(a;b)$ platí

a) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Věta 7.4 (integrace per-partes). Mějme funkce u a v, které mají konečné derivace ve všech bodech intervalu $(a;b)$. Potom na intervalu $(a;b)$ platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Věta 7.5 (1. substituční metoda). Mějmě funkci f, která je spojitá na intervalu $(c; d)$. Dále mějme funkci $g : y = g(x)$, která má konečnou derivaci ve všech bodech intervalu $(a; b)$ a $H(g) \subset (c; d)$. Potom na intervalu $(a; b)$ platí

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y,$$

dosadíme-li napravo $y = g(x)$.

Věta 7.6 (2. substituční metoda). Mějmě funkci f, která je spojitá na intervalu $(c; d)$. Dále mějme funkci $g : y = g(x)$ s definičním oborem $D(g) = (a; b)$ a oborem hodnot $H(g) = (c; d)$, která má konečnou a nenulovou derivaci ve všech bodech $x \in D(g)$. Potom na intevalu $(c; d)$ platí

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

dosadíme-li napravo $x = g^{-1}(y)$.

Poznámka.

1. $\displaystyle\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & a \in \mathbb{Z},\ a \neq -1, \\ x > 0, & a \in \mathbb{R},\ a \neq -1, \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0,$

3. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

4. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,$

5. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

6. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C, \qquad x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \qquad |x| < 1,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

11. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

12. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + C, \qquad x \neq 0,$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{argcosh} x + C, & x > 1, \\ -\operatorname{argcosh}(-x) + C, & x < -1, \end{cases}$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$