Definice 8.1. Mějme uzavřený interval $\langle a; b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$.

Dělením intervalu $\langle a; b\rangle$ rozumíme konečnou posloupnost $D = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, bodů z intervalu $\langle a; b\rangle$ tak, že platí

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Čísla x_i jsou **dělící body** intervalu.

Definice 8.2. Mějme funkci f, která je definovaná a omezená na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$. Dále mějme dělení D tohoto intervalu $\langle a; b\rangle$ a označme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ pro $i = 1, \dots, n$.

a) **Dolní integrální součet** funkce f příslušný dělení D je číslo $s(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1}; x_i\rangle} f(x) \cdot \Delta x_i.$

b) **Horní integrální součet** funkce f příslušný dělení D je číslo $S(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1}; x_i\rangle} f(x) \cdot \Delta x_i.$

Definice 8.3. Mějme funkci f, která je definovaná a omezená na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$. Dále uvažujme množinu $\mathcal{D}$ všech možných dělení D tohoto intervalu $\langle a; b\rangle$.

Řekneme, že funkce f je (**Riemannovsky**) **integrovatelná** na intervalu $\langle a; b\rangle$, pokud existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$I = \sup_{D\in\mathcal{D}} s(f, D) = \inf_{D\in\mathcal{D}} S(f, D).$$

Číslo I potom nazýváme **určitý integrál** funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ a píšeme $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I.$

Dále pro $a > b$ definujeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Věta 8.1. Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2 (Newtonova–Leibnizova). Mějme funkci f, která je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$. Dále mějme funkci F, která je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a je primitivní funkcí k funkci f na $(a; b)$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Věta 8.3 (linearita určitého integrálu). Mějme funkce f, g, které jsou integrovatelné na intervalu $\langle a;b\rangle$. Potom platí

a) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c\in\mathbb{R}.$

Věta 8.4 (aditivita určitého integrálu). Mějme funkci f, která je integrovatelná na intervalu $\langle a;b\rangle$. Potom pro libovolné $c\in(a;b)$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.5 (per-partes v určitém integrálu). Mějme funkce u a v, které jsou spojité na intervalu $\langle a;b\rangle$ a jejich derivace u' a v' jsou integrovatelné na tomto intervalu. Potom platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Věta 8.6 (substituce v určitém integrálu). Mějmě funkci f, která je spojitá na intervalu $\langle c;d\rangle$. Dále mějme funkci $g : y = g(x)$, která má konečnou derivaci ve všech bodech intervalu $\langle a;b\rangle$, g' je integrovatelná na $\langle a;b\rangle$ a $H(g)\subset\langle c;d\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Věta 8.7 (o střední hodnotě). Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, potom existuje $\xi\in(a;b)$ takové, že platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Věta 8.8 (nezápornost určitého integrálu). Mějme funkci f, která je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$. Potom platí

$$\Big(\,\forall\, x\in\langle a;b\rangle :\ f(x)\ge 0\,\Big) \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

Věta 8.9 (monotonie určitého integrálu). Mějme funkce f a g, které jsou spojité na intervalu $\langle a; b\rangle$. Potom platí

$$\Big(\,\forall\, x \in \langle a; b\rangle :\ \ f(x) \leq g(x)\,\Big) \quad\Rightarrow\quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.10. Mějme funkci f, která je spojitá na intervalu I a mějme $a \in I$. Potom funkce F definovaná na I vztahem

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

má na intervalu I derivaci a platí $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I$.

Definice 8.4. Mějme funkci f, která splňuje (alespoň) jednu z následujících vlastností:

a) f je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, c\rangle$, $a < c < b$, a f není omezená na levém okolí bodu b,

b) f je integrovatelná v každém intervalu $\langle c, b\rangle$, $a < c < b$, a f není omezená na pravém okolí bodu a.

Řekneme, že **nevlastní integrál vlivem (neomezené) funkce**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

konverguje, jestliže existuje vlastní limita

a) $\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, a píšeme: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) $\lim\limits_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a píšeme: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Jestliže příslušná limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že integrál **diverguje**.

Pokud je příslušná limita $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Definice 8.5. Mějme funkci f, která není omezená v okolí bodu $d \in (a, b)$.

Říkáme, že **nevlastní integrál vlivem (neomezené) funkce** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, **konverguje** (resp. **diverguje**), jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(resp. alepoň jeden z integrálů diverguje). Jejich součet pak nazýváme hodnotou daného integrálu.

Definice 8.6. Mějme funkci f, která je integrovatelná na každém intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$.

a) Říkáme, že **nevlastní integrál vlivem (neomezené horní) meze** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**, jestliže existuje vlastní limita $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a píšeme: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Říkáme, že **nevlastní integrál vlivem (neomezené dolní) meze** $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**, jestliže existuje vlastní limita $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a píšeme: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Jestliže příslušná limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že integrál **diverguje**.

Definice 8.7. Mějme $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že **nevlastní interál vlivem (neomezené) meze**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje (resp. **diverguje**), jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(resp. alespoň jeden z integrálů diverguje).

Věta 8.11 (integrální kritérium). Mějme funkci f, která je definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$, na kterém je spojitá, nezáporná a klesající. Dále mějme posloupnost (a_n) reálných čísel takovou, že $a_n = f(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ buď současně konvergují nebo současně divergují.