poslední změna: 18.11.2019

Definice 9.1. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$, bod $x_0 \in D$, ve kterém má funkce f má konečné derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. **Taylorův polynom** (nejvýše) n-tého stupně funkce f v bodě x_0 je polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Maclaurinův polynom (nejvýše) n-tého stupně funkce f je Taylorův polynom T_n funkce f v bodě $x_0 = 0$

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Věta 9.1 (Taylorova). Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$, bod $x_0 \in D$ a jeho okolí $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, takové, že funkce f má ve všech bodech tohoto okolí spojité derivace až do řádu $(n+1)$ včetně, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom pro každý bod $x \in U(x_0, \delta)$ platí **Taylorův vzorec**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

přičemž **zbytek** R_{n+1} lze vyjádřit v následujících tvarech:

a) **Lagrangeův tvar zbytku**: $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, kde ξ je vhodný bod ležící mezi x a x_0,

b) **Cauchyův tvar zbytku**: $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x - \eta)^n(x - x_0)$, kde η je vhodný bod ležící mezi x a x_0,

c) **integrální tvar zbytku**: $R_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n \, dt.$

Věta 9.2. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$, bod $x_0 \in D$ a jeho okolí $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, takové, že funkce f má ve všech bodech tohoto okolí konečné derivace všech řádů. Jestliže

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in U(x_0, \delta): \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \qquad \text{(kde } f^{(0)}(x) = f(x)\text{)}$$

potom

$$\forall\, x \in U(x_0, \delta): \lim_{n \to +\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$