Desatero MA1 2021/2022

Každý student předmětu KMA/MA1 dostane jedno z níže uvedených tvzení, které musí umět zformulovat, zdůvodnit jeho platnost a ilustrovat na příkladech a/nebo obrázku. V zadání bude pouze název daného tvrzení, tj. text před dvojtečkou, nikoli vlastní tvrzení psané kurzívou, které slouží pouze jako pomůcka pro domácí přípravu.

1. Jednoznačnost limity: *Každá posloupnost (a_n) má nejvýše jednu limitu.*
2. Souvislost omezenosti, monotonie a konvergence: *Omezená a monotónní posloupnost (a_n) je konvergentní.*
3. Věta o sevření: *Mějme dány posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) takové že*
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n \le b_n \le c_n$$
a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost (b_n) konverguje a platí, že $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$.
4. Srovnávací kritérium konvergence řad s nezápornými členy: *Mějme dány dvě posloupnosti (a_n) a (b_n) takové, že*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 0 \le a_n \le b_n.$$
Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, potom diverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.
5. Cauchyova věta: *Jestliže je funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a platí, že $f(a)\cdot f(b) < 0$, potom existuje bod $c \in (a;b)$ takový, že $f(c) = 0$.*
6. Lagrangeova věta o střední hodnotě: *Jestliže funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a má derivaci v každém bodě intervalu $(a;b)$, potom existuje bod $c \in (a;b)$ takový, že*
$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).$$
7. Fermatova věta: *Jestliže funkce f nabývá v bodě a svého lokálního miminima nebo maxima a existuje $f'(a)$, potom $f'(a) = 0$.*
8. Souvislost monotonie a derivace funkce: *Jestliže $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a;b)$, potom je funkce f ostře rostoucí na $(a;b)$.*

9. Integrální verze věty o střední hodnotě: *Jestliže funkce* f *je spojitá na intervalu* $\langle a; b \rangle$, *potom existuje bod* $c \in (a; b)$ *takový, že*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a).$$

10. Integrální kritérium konvergence řady: *Mějme dánu funkci* f, *která je spojitá, nezáporná a klesající na intervalu* $\langle 1, +\infty)$ *a posloupnost* (a_n) *takovou, že* $a_n = f(n)$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom řada* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje integrál* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.