

Příklad 1. matematické kyvadlo

Pohyb matematického kyvadla s vnějším buzením lze popsat pomocí následující počáteční úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$(1) \quad \begin{cases} m l u'' + b l u' + m g \sin u = f, \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta, \end{cases}$$

kde

$u = u(t)$ je úhel, který svírá závěs kyvadla se svislou osou v čase t ,
 $f = f(t)$ je vnější budící síla,
 α je počáteční úhlová výchylka kyvadla,
 β je počáteční úhlová rychlost kyvadla,
 l je délka nehmotného závěsu kyvadla,
 m je hmotnost zavěšeného bodu,
 b je tlumící konstanta,
 g je tíhové zrychlení.

1. Zaveďte nové funkce

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \quad , \\ y_2(t) &= \quad , \end{aligned}$$

tak, abyste převedli počáteční úlohu (1) na počáteční úlohu se soustavou dvou rovnic 1. řádu pro y_1 a y_2

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' = \quad , \\ y_2' = \quad , \\ y_1(0) = \quad , \\ y_2(0) = \quad . \end{cases}$$

2. Uvažujme $m = l = g = 1$, $b = 0$ a $f(t) = 0$. Nakreslete průběh výchylky a rychlosti kyvadla pro $\alpha = 0$ a $\beta = 1$. Nakreslete fázový portrét.

3. Uvažujme

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, \\ \alpha &= 5, \\ \beta &= 8, \\ l &= 10, \\ m &= 10, \\ b &= 1, \\ g &= 9.81. \end{aligned}$$

Kolikrát se otočí kyvadlo kolem své osy?

4. Uvažujme $f(t) = 0$, $g = 9.81$, počáteční výchylku $\alpha = 0$ a rychlost $\beta = 1$. Určete zbývající parametry úlohy tak, aby se kyvadlo otočilo kolem své osy právě 30 krát:

$$l = \quad ,$$

$$m = \quad ,$$

$$b = \quad .$$

5. Uvažujme $m = l = 10$, $b = 1$. Doplňte následující dvě tabulky.

	$g = 9.78$ (na rovníku)	$g = 9.81$ (v Plzni)	$g = 9.83$ (na severním pólu)
$\alpha = 0, \beta = 5$			
$\alpha = 0, \beta = 6$			
$\alpha = 0, \beta = 7$			

Tabulka 1: Počet otáček kyvadla **bez vnějšího buzení** $f(t) = 0$.

	$g = 9.78$ (na rovníku)	$g = 9.81$ (v Plzni)	$g = 9.83$ (na severním pólu)
$\alpha = 0, \beta = 5$			
$\alpha = 0, \beta = 6$			
$\alpha = 0, \beta = 7$			

Tabulka 2: Počet otáček kyvadla **s vnějším buzením** $f(t) = 80 \sin t$.