Příklad 1. Uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Určete prvních pět členů Picardových aproximací řešení počáteční úlohy (1) s volbou nulté aproximace $y_0(t) \equiv 1$.
2. Určete tvar n-té Picardovy aproximace $y_n(t),\ n \in \mathbb{N}$.
3. Určete obor konvergence funkční posloupnosti $(y_n(t))$ a její limitní funkci y.
4. Najděte řešení počáteční úlohy (1) (metodou separace, metodou variace konstanty, ...).
5. Ověřte splnění předpokladů Picardovy-Lindelöfovy věty.
6. Na jakém intervalu I zaručuje Picardova-Lindelöfova věta existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy (1)?

Příklad 2. Uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Určete první čtyři členy Picardových aproximací řešení počáteční úlohy (2) s volbou nulté aproximace $y_0(t) \equiv 0$.
2. Najděte řešení počáteční úlohy (2) (metodou separace, metodou variace konstanty, ...).
3. Ověřte splnění předpokladů Picardovy-Lindelöfovy věty.
4. Na jakém intervalu I zaručuje Picardova-Lindelöfova věta existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy (2)?

Příklad 3. Uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt[3]{y^2(t)}, \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Najděte všechna řešení $y = y(t)$ počáteční úlohy (3). Kolik má tato úloha řešení?
2. Rozhodněte o splnění předpokladů Picardovy-Lindelöfovy věty.

Příklad 4. Mějme funkci $f = f(t,y)$ danou po částech

$$f(t,y) = \begin{cases} g(t,y) & \text{pro } (t,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (t,y) = (0,0), \end{cases}$$

přičemž funkci $g = g(t,y)$ postupně uvažujeme ve tvaru

1. $g(t,y) = \dfrac{t^2y^2}{t^2+y^2}$,
2. $g(t,y) = \dfrac{t^2y^2}{t^4+y^4}$,
3. $g(t,y) = \dfrac{t^3y^2}{t^4+y^4}$.

Označme $D = \langle 0,\alpha\rangle \times \langle -\beta,\beta\rangle,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$. V každém z předchozích případů:

1. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá na D.
2. Rozhodněte, zda je funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ spojitá na D.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ omezená na D.
4. Rozhodněte, zda je funkce f lipschitzovsky spojitá vzhledem k y na D.
5. Rozhodněte o existenci řešení a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Příklad 5. Uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2}{t}(y(t)-1), \qquad t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Najděte všechna řešení $y = y(t)$ počáteční úlohy (4). Kolik má řešení v závislosti na hodnotě počáteční podmínky y_0?
2. Rozhodněte o splnění předpokladů Picardovy-Lindelöfovy věty.
