**Příklad 1.** Rozhodněte o lokální a globání existenci a jednoznačnosti řešení počátečních úloh:

1) $\begin{cases} y'(t) = \sin(ty(t)), & t \in I, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'(t) = 1 + \sqrt[3]{y^2(t)}, & t \in I, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'(t) = (t + y(t))t^2 y^2(t), & t \in I, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^t + \dfrac{t}{y(t)}, & t \in I, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

---

**Příklad 2.** Následující počáteční úlohu převeďte na počáteční úlohu pro jednu rovnici vyššího řádu a najděte její řešení:

1) $\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = 1 - y_1(t), & t > 0, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1'(t) + y_2'(t) = 4y_1(t) - 2y_2(t), & t > 0, \\ y_1'(t) - y_2'(t) = -2y_1(t) - 4y_2(t), & t > 0, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

---

**Příklad 3.** Následující úlohu převeďte na počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu:

1) $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 1, & t > 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2, \end{cases}$

2) $\begin{cases} ty'''(t) + t^2 y''(t) + t^3 y'(t) + t^4 y(t) + 1 = 0, & t > 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''(t) + t = (y'(t))^2 + 4 + y^3(t), & t > 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

---

**Příklad 4.** Mějme následující počáteční úlohu

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), & t \in I, \\ y_2'(t) = -y_1(t), & t \in I, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu $(1)$ zapsat ve tvaru
$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \in I, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$
2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ spojitá na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$. Pokud ano, určete konstantu lipschitzovskosti $\ell$.
4. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy $(1)$.
5. Určete prvních pět členů Picardových aproximací řešení Cauchyovy úlohy $(1)$ s volbou nulté aproximace $\mathbf{y}_0(t) \equiv \mathbf{y}_0$.
6. Určete tvar $n$-té Picardovy aproximace $\mathbf{y}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$.
7. Určete limitní vektorovou funkci $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ posloupnosti Picardových aproximací $(\mathbf{y}_n(t))$.
8. Převeďte počáteční úlohu $(1)$ na počáteční úlohu pro jednu diferenciální rovnici druhého řádu.
9. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice druhého řádu z předchozího bodu.

---

**Příklad 5.** Mějme následující počáteční úlohu

$$\begin{cases} y''(t) + ty'(t) = 0, \quad t \in I, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu $(2)$ zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \in I, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ spojitá na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$. Pokud ano, určete konstantu lipschitzovskosti $\ell$.

**Výsledky**:

**Příklad 1.**

1) a) globální existence a jednoznačnost: $\ell = \max\limits_{t\in\langle t_1,t_2\rangle, u\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = \max\{|t_1|,|t_2|\}$, tedy existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle t_1, t_2\rangle \subset \mathbb{R}$,
b) lokální existence a jednoznačnost: $f$ je globálně lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné (viz a)), tedy je i lokálně lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné na $D$, pro dostatečně velké $\alpha, \beta$ je $m = 1,\ h = \min\{\alpha, \beta\}$, tedy existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle 0, C\rangle$, $C > 0$,

2) a) globální: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$, tedy není omezená pro $y \to 0$ a $f$ není lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné. Neumíme tedy rozhodnout.
b) lokální: $f$ je spojitá na $D$, ale není tam lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné. Je zajištěna existence řešení počáteční úlohy, ale ne jednoznačnost (o té neumíme rozhodnout).

3) a) globální existence: tedy nemůžeme rozhodnout o globální existenci a jednoznačnosti,

b) lokální existence: $\ell = 2(1+\beta)\alpha^3 + 3(1+\beta)^2\alpha^2,\ m = \alpha^3(1+\beta)^2 + \alpha^2(1+\beta)^3,\ h = \min\left\{\alpha, \dfrac{\beta}{\alpha^3(1+\beta)^2+\alpha^2(1+\beta)^3}\right\}$,

$C = \max\limits_{\alpha>0,\beta>0} h \doteq 0.482948,\ I = \langle 0, C\rangle$, tedy existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle 0, C\rangle$.

4) a) globální: $f$ není spojitá na $\langle t_1, t_2\rangle \times \mathbb{R}$, tedy neumíme rozhodnout,
b) lokální: $f$ je spojitá na $D = \langle 0, \alpha\rangle \times \langle 1-\beta, 1+\beta\rangle,\ 0 < \beta < 1,\ \ell = \dfrac{\alpha}{(1-\beta)^2},\ m = \mathrm{e}^{\alpha} + \dfrac{\alpha}{1-\beta}$,

$h = \min\left\{\alpha, \dfrac{\beta}{\mathrm{e}^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\beta}}\right\}, C = \max\limits_{\alpha>0,\beta>0} h \doteq 0.298679,\ I = \langle 0, C\rangle$, tedy existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle 0, C\rangle$.