Příklad 1. Uvažujme úlohu

$$y''(t) - y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Určete fundamentální systém diferenciální rovnice (1).
2. Určete všechna řešení diferenciální rovnice (1).
3. Ověřte, že
$$y(t) = 3\sinh t$$
je řešením diferenciální rovnice (1).

Příklad 2. Uvažujme následující počáteční úlohy

1) $\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

1. Určete fundamentální systém diferenciální rovnice.
2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice.
3. Určete všechna řešení počáteční úlohy.

Příklad 3. Uvažujme následující diferenciální rovnici

$$2t^2 y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2}$$

1. Které z následujících funkcí řeší diferenciální rovnici (2)?
$$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = \sin t, \quad y_3(t) = \mathrm{e}^t, \quad y_4(t) = t, \quad y_5(t) = \cos t.$$
2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice (2) (použijte metodu snižování řádu).
3. Určete fundamentální systém, Wronského matici a wronskián diferenciální rovnice (2).

Příklad 4. Metodou variace konstant najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = 8\sinh t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5. Metodou odhadu (tj. metodou neurčitých koeficientů) najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \cosh(2t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Výsledky:

Příklad 1.
1) $y_1(t) = \mathrm{e}^t,\ y_2(t) = \mathrm{e}^{-t},$ 2) $y(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$ 3) $3\sinh t = 3\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^t - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-t},$

Příklad 2.
1) $y(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t},$ 2) $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t,$ 3) $y(t) = t\,\mathrm{e}^t,$

Příklad 3.
1) $y(t) = t,$ 2) $y(t) = C_1 t + C_2 t^{-\frac{1}{2}},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$ 3) $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} t & t^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix},\ \det(\mathbf{Y}) = -\dfrac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}},$

Příklad 4.
$y(t) = \mathrm{e}^t(C_1 + 2t - 1) + \mathrm{e}^{-t}(C_2 + 1 + 2t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$ nebo $y(t) = (C_1 - 4)\sinh t + (C_2 + 4t)\cosh t,$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

Příklad 5.
$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}\left(C_2 + \dfrac{1}{6}t\right) + \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$