Příklad 1. Najděte obecné řešení soustav diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty

1) $\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1(t) - 2y_2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 4y_2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 7y_2(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Příklad 2. Uvažujme počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{cases} y_1'(t) = ay_1(t) + by_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = cy_1(t) + dy_2(t), & t > 0, \\ y_1(0) = p_1, \\ y_2(0) = p_2, \end{cases} \tag{1}$$

kde $a, b, c, d, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Úlohu (1) zapíšeme ve tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

kde $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$, $\mathbf{y}'(t) = [y_1'(t), y_2'(t)]^T$, $\mathbf{y}_0 = [p_1, p_2]^T$ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Uvažujme následující matice $\mathbf{A}$:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$,

5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

6) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

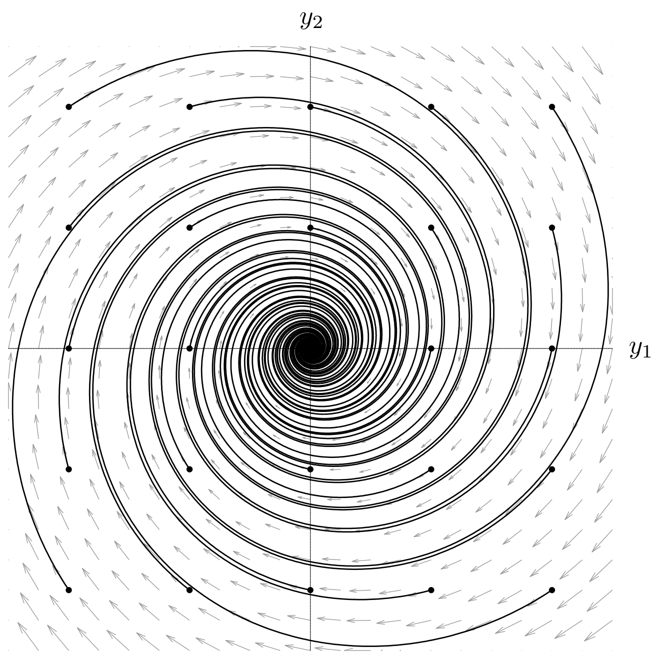
Najděte řešení soustavy diferenciálních rovnic. Pro různé volby počátečních podmínek načrtněte řešení v rovině y_1y_2.

Příklad 3. V systému Matlab vykreslete v rovině $y_1 y_2$ řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = -\dfrac{1}{5}\, y_1(t) + y_2(t), & t \in I, \\[2ex] y_2'(t) = -y_1(t) - \dfrac{1}{5}\, y_2(t). \end{cases}$$

Uvažujte $y_1 \in (-5; 5),\ y_2 \in (-5; 5)$.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A} = [-0.2,\ 1; -1,\ -0.2]$$



Nápověda pro vykreslení v systému Matlab:

1. Zvolte počáteční podmínky $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 2$ a vykreslete graf řešení soustavy diferenciálních rovnic (2) v závislosti na čase t. Použijte funkci `ode45`.
2. Řešení zobrazte v rovině $y_1 y_2$ a zvýrazněte počátek trajektorie.
3. V rovině $y_1 y_2$ zobrazte různé trajektorie s počátečními podmínkami

$$\begin{array}{ll} y_1(0) = -4, & y_2(0) = -4, \\ y_1(0) = -4, & y_2(0) = -2, \\ y_1(0) = -4, & y_2(0) = 0, \\ & \vdots \\ y_1(0) = 4, & y_2(0) = 4. \end{array}$$

   Dále použijte příkaz `axis equal`, upravte rozsahy na obou osách.
4. Zobrazte směrové pole diferenciální rovnice v (2). Použijte příkaz `quiver`.