Příklad 1. Mějme soustavu

$$\begin{cases} y_1'(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = c \cdot y_1(t) + d \cdot y_2(t), & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Soustavu zapišme ve tvaru $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$, kde

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T, \qquad \mathbf{y}'(t) = [y_1'(t), y_2'(t)]^T, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Rozhodněte o stabilitě počátku pomocí determinantu $\det \mathbf{A} = ad - bc$ a stopy $\operatorname{Tr} \mathbf{A} = a + d$.

Příklad 2. Mějme soustavu

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) - y_1(t), \\ y_2'(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) - y_2(t). \end{cases}$$

1. Určete všechny její klidové stavy.
2. Rozhodněte o stabilitě nalezených klidových stavů a načrtněte fázový portrét.

Příklad 3. Uvažujme dvě soustavy

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t), \\ y_2'(t) = -y_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + \dfrac{y_2(t)}{\ln \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}}, \\ y_2'(t) = -y_2(t) + \dfrac{y_1(t)}{\ln \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}}. \end{cases} \tag{3}$$

1. Rozhodněte o stabilitě počátku pro soustavu (2) a načrtněte fázový portrét.
2. Rozhodněte o stabilitě počátku pro soustavu (3) a načrtněte fázový portrét.

Příklad 4. Mějme soustavu

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1^3(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) = y_2(t)(y_1^2(t) + y_2(t) - 2). \end{cases}$$

Rozhodněte o stabilitě počátku a načrtněte fázový portrét.

Příklad 5. Uvažujme dvě soustavy

$$(4)\qquad \begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + \sin\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}, \\ y_2'(t) = -y_2(t) + \sin\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} y_1'(t) = -10\,y_1(t) + \sin\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}, \\ y_2'(t) = -10\,y_2(t) + \sin\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}. \end{cases}$$

1. Rozhodněte o stabilitě počátku pro soustavu (4) a načrtněte fázový portrét.
2. Rozhodněte o stabilitě počátku pro soustavu (5) a načrtněte fázový portrét.