

Příklad 1. Najděte všechna řešení okrajové úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$(1) \quad \begin{cases} y''(t) + 3y(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Příklad 2. Najděte všechna řešení okrajové úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$(2) \quad \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Příklad 3. Určete vlastní čísla a vlastní funkce operátoru L

$$\begin{aligned} (Ly)(t) &:= -y''(t), \\ D(L) &:= \{y \in (C^1((0, \pi)) \cap C^2(0, \pi)) : y'(0) = y'(\pi) = 0\}. \end{aligned}$$

Své tvrzení porovnejte s řešeními úloh (1) a (2).

Příklad 4. Uvažujme okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$(3) \quad \begin{cases} y''(t) + 3y(t) = 1, & t \in (0, \pi), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

1. Převed'te hledání řešení okrajové úlohy (3) na hledání řešení rovnice

$$F(\alpha) = 0,$$

kde $F : \alpha \mapsto y'(\pi)$, přičemž y je řešení počáteční úlohy

$$(4) \quad \begin{cases} y''(t) + 3y(t) = 1, & t \in (0, \pi), \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Najděte předpis pro funkci F .

2. Načrtněte graf funkce F a určete kořen rovnice $F(\alpha) = 0$.
 3. Najděte všechna řešení okrajové úlohy (3) a vykreslete jejich grafy.
 4. S využitím numerického řešiče ode45 (v Matlabu najděte numerickou aproximaci řešení počáteční úlohy (4)) vykreslete přibližně graf funkce F .
 5. Užitím metody střelby nalezněte přibližnou hodnotu kořenu rovnice $F(\alpha) = 0$. Při výpočtu využijte některou z metod na řešení nelineárních rovnic (např. metodu sečen, metodu bisekce, ...).
-

Příklad 5. Uvažujme okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$(5) \quad \begin{cases} y''(t) + 26 \sin y(t) = 1, & t \in (0, 3), \\ y(0) = y(3) = 0. \end{cases}$$

1. Zaveďte nové funkce y_1 a y_2 tak, abyste převedli úlohu (5) na okrajovou úlohu se soustavou dvou rovnic 1. řádu pro y_1 a y_2

$$(6) \quad \begin{cases} y_1'(t) = \dots\dots\dots, \\ y_2'(t) = \dots\dots\dots, \\ y_1(0) = \dots\dots\dots, \\ y_1(3) = \dots\dots\dots \end{cases}$$

2. Převed'te hledání řešení okrajové úlohy (5) na hledání řešení rovnice

$$F(\alpha) = 0,$$

kde $F : \alpha \mapsto u_1(3)$, přičemž (u_1, u_2) je řešení počáteční úlohy

$$(7) \quad \begin{cases} y_1'(t) = \dots\dots\dots, \\ y_2'(t) = \dots\dots\dots, \\ y_1(0) = \dots\dots\dots, \\ y_2(0) = \alpha. \end{cases}$$

3. Načrtněte graf funkce $F = F(\alpha)$ a přibližně určete všechny kořeny rovnice $F(\alpha) = 0$.
4. Načrtněte grafy všech řešení okrajové úlohy (5).
-