Příklad 1. Uvažujme okrajovou úlohu $(u = u(x))$

$$\begin{cases} -u'' - 3u = \dfrac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

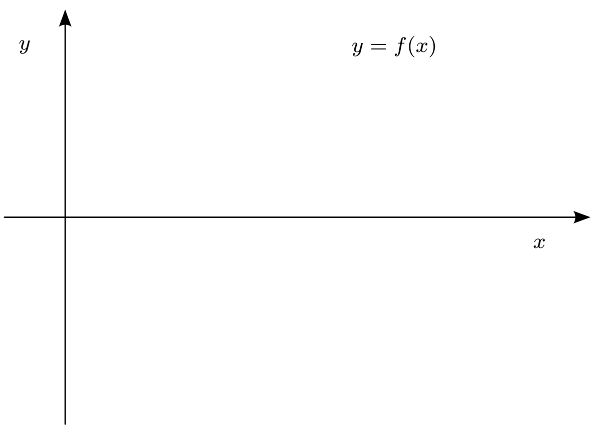
$$\begin{cases} -v'' - 3v = \lambda v, & x \in (0, \pi), \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases}$$

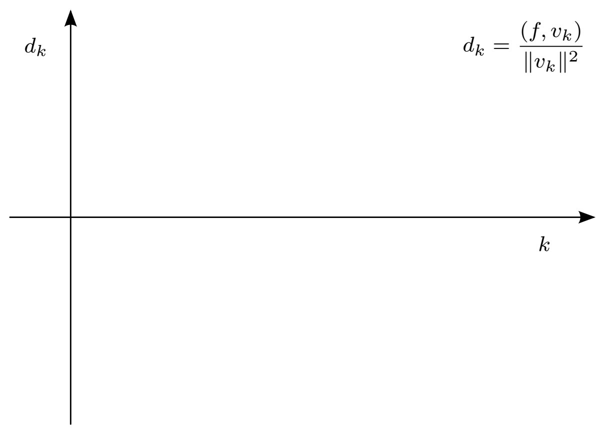
$\lambda_1 = \dots\dots\dots$, $\lambda_2 = \dots\dots\dots$, $\lambda_3 = \dots\dots\dots$, $\lambda_4 = \dots\dots\dots$, $\lambda_k = \dots\dots\dots$, $k \in \dots$,

$v_1(x) = \dots\dots\dots$, $v_2(x) = \dots\dots\dots$, $v_3(x) = \dots\dots\dots$, $v_4(x) = \dots\dots\dots$, $v_k(x) = \dots\dots\dots$,

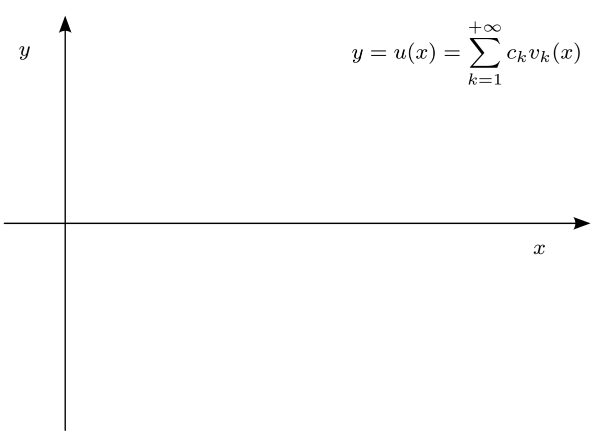
$\|v_1\| = \dots\dots\dots$, $\|v_2\| = \dots\dots\dots$, $\|v_3\| = \dots\dots\dots$, $\|v_4\| = \dots\dots\dots$, $\|v_k\| = \dots\dots\dots$.

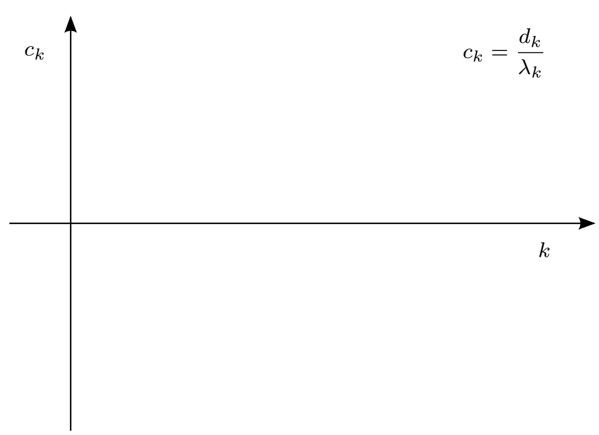
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (1). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (1).





Příklad 2. Uvažujme okrajovou úlohu ($u = u(x)$)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-u'' - 3u = \frac{3-x}{2}, \quad x \in (0,3),\\
&u(0) = u(3) = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$

1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

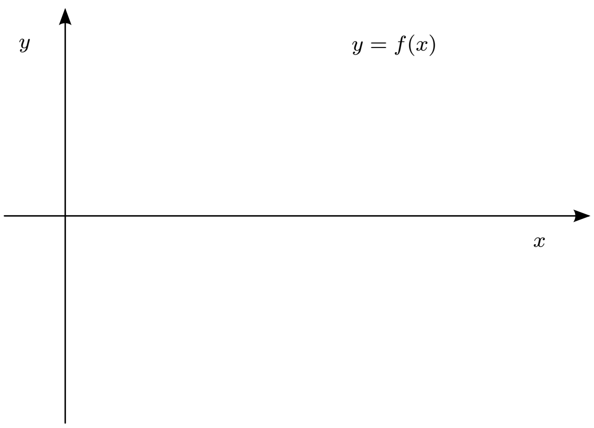
$$
\left\{
\begin{aligned}
&-v'' - 3v = \lambda v, \quad x \in (0,3),\\
&v(0) = v(3) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

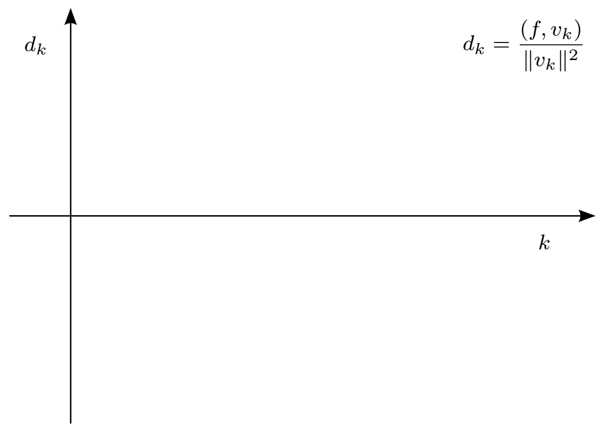
$\lambda_1 = \dots\dots$, $\lambda_2 = \dots\dots$, $\lambda_3 = \dots\dots$, $\lambda_4 = \dots\dots$, $\lambda_k = \dots\dots$, $k \in \dots$,

$v_1(x) = \dots\dots$, $v_2(x) = \dots\dots$, $v_3(x) = \dots\dots$, $v_4(x) = \dots\dots$, $v_k(x) = \dots\dots$,

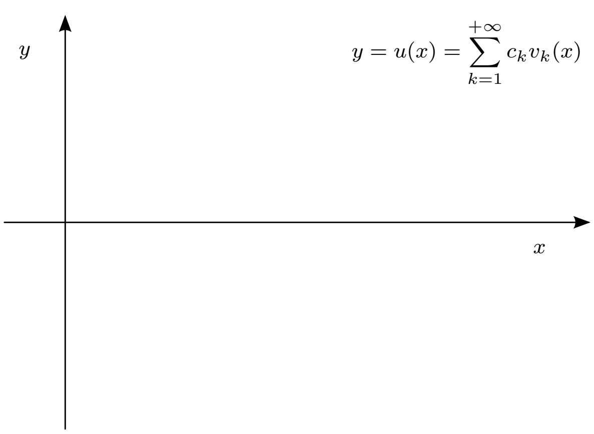
$\|v_1\| = \dots\dots$, $\|v_2\| = \dots\dots$, $\|v_3\| = \dots\dots$, $\|v_4\| = \dots\dots$, $\|v_k\| = \dots\dots$.

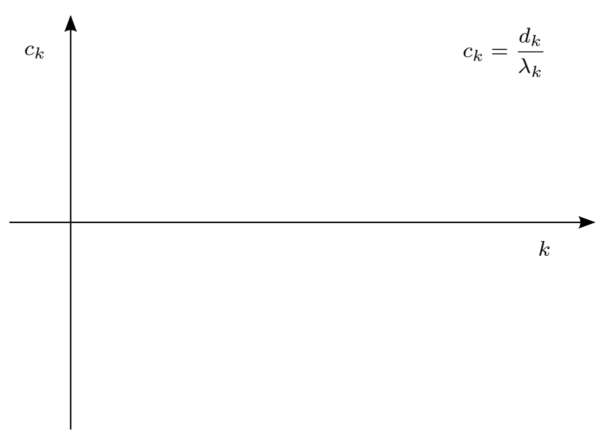
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{3-x}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (2). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (2).





Příklad 3. Uvažujme okrajovou úlohu $(u = u(x))$

$$\begin{cases} -u'' - 3u = \dfrac{x}{2}, \qquad x \in (0,3), \\ u(0) = u(3) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

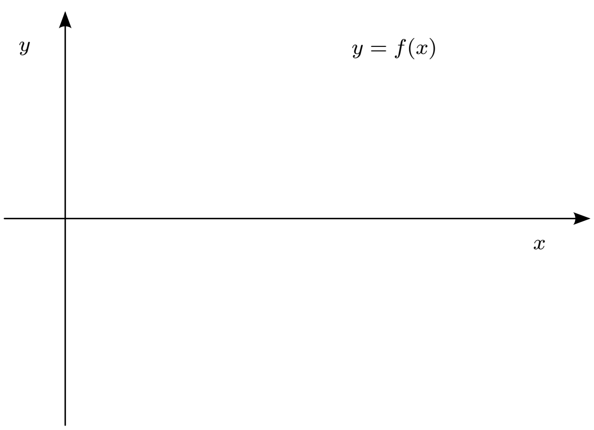
$$\begin{cases} -v'' - 3v = \lambda v, \quad x \in (0,3), \\ v(0) = v(3) = 0. \end{cases}$$

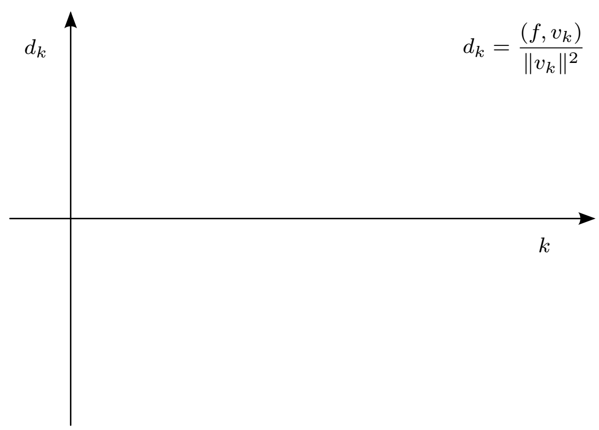
$\lambda_1 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_2 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_3 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_4 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_k = \dots\dots\dots,\ k \in \dots,$

$v_1(x) = \dots\dots\dots,\quad v_2(x) = \dots\dots\dots,\quad v_3(x) = \dots\dots\dots,\quad v_4(x) = \dots\dots\dots,\quad v_k(x) = \dots\dots\dots,$

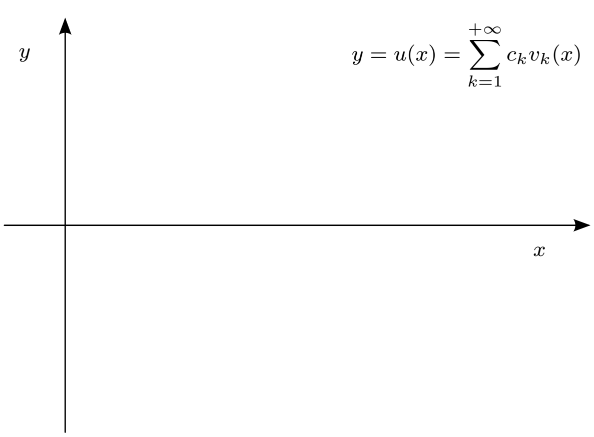
$\|v_1\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_2\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_3\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_4\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_k\| = \dots\dots\dots.$

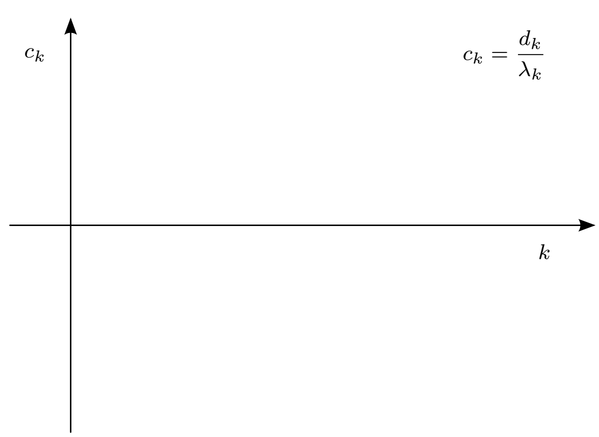
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{x}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (3). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (3).





Příklad 4. Uvažujme okrajovou úlohu ($u = u(x)$)

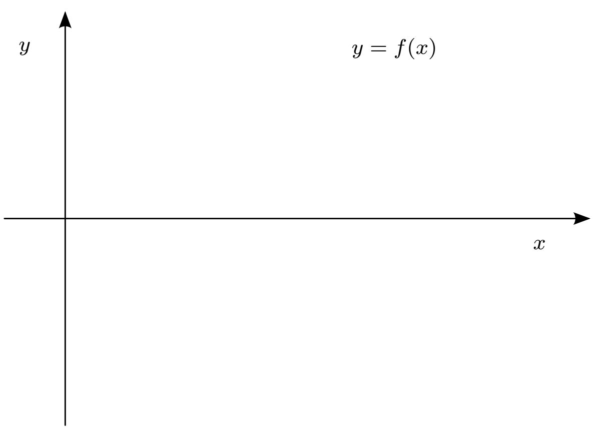
$$(4)\qquad \begin{cases} -u'' - 4.39\,u = \dfrac{x}{2}, & x \in (0,3), \\ u(0) = u(3) = 0. \end{cases}$$

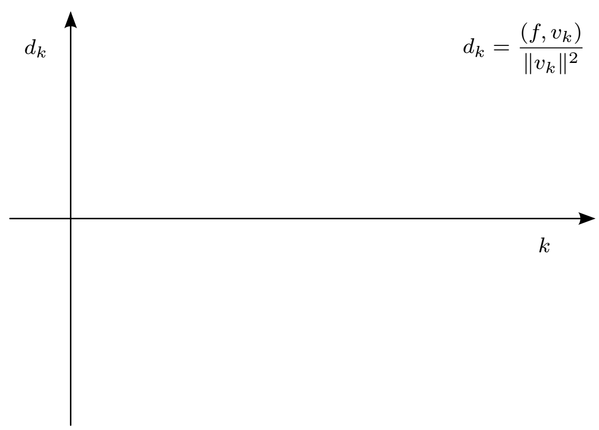
1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

$$\begin{cases} -v'' - 4.39\,v = \lambda v, & x \in (0,3), \\ v(0) = v(3) = 0. \end{cases}$$

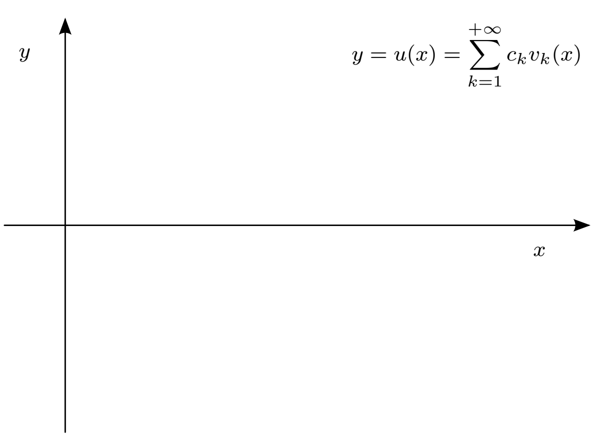
$\lambda_1 = \dots\dots\dots$, $\lambda_2 = \dots\dots\dots$, $\lambda_3 = \dots\dots\dots$, $\lambda_4 = \dots\dots\dots$, $\lambda_k = \dots\dots\dots$, $k \in \dots$,
$v_1(x) = \dots\dots\dots$, $v_2(x) = \dots\dots\dots$, $v_3(x) = \dots\dots\dots$, $v_4(x) = \dots\dots\dots$, $v_k(x) = \dots\dots\dots$,
$\|v_1\| = \dots\dots\dots$, $\|v_2\| = \dots\dots\dots$, $\|v_3\| = \dots\dots\dots$, $\|v_4\| = \dots\dots\dots$, $\|v_k\| = \dots\dots\dots$.

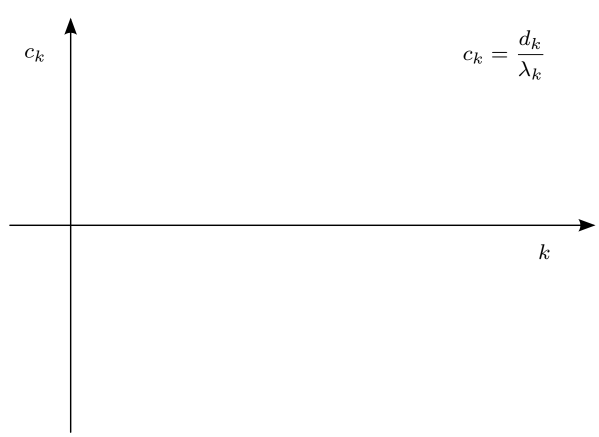
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{x}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (4). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (4).





Příklad 5. Uvažujme okrajovou úlohu $(u = u(x))$

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{4\pi^2}{9}u = \dfrac{x}{2}, & x \in (0,3), \\ u(0) = u(3) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

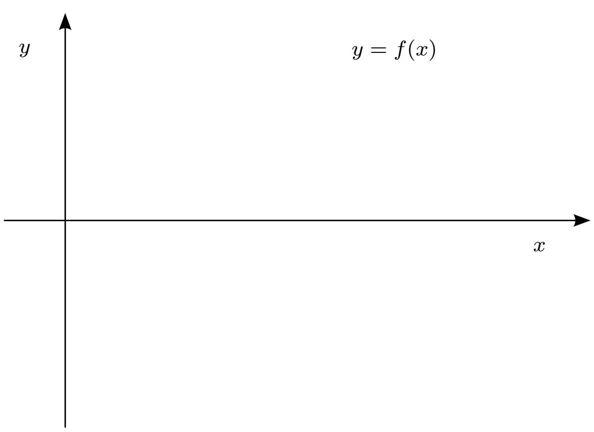
$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{4\pi^2}{9}v = \lambda v, & x \in (0,3), \\ v(0) = v(3) = 0. \end{cases}$$

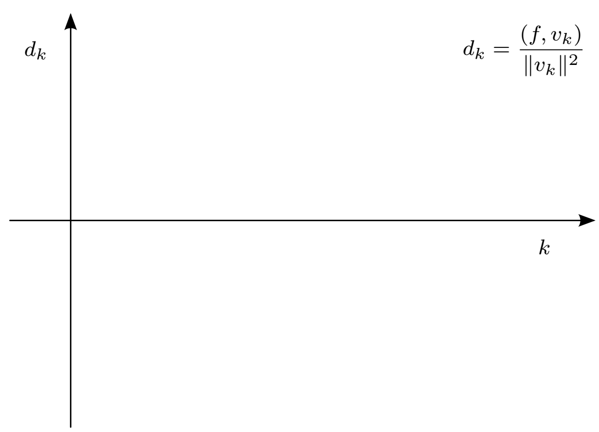
$$\lambda_1 = \dots\dots, \quad \lambda_2 = \dots\dots, \quad \lambda_3 = \dots\dots, \quad \lambda_4 = \dots\dots, \quad \lambda_k = \dots\dots, \quad k \in \dots,$$

$$v_1(x) = \dots\dots, \quad v_2(x) = \dots\dots, \quad v_3(x) = \dots\dots, \quad v_4(x) = \dots\dots, \quad v_k(x) = \dots\dots,$$

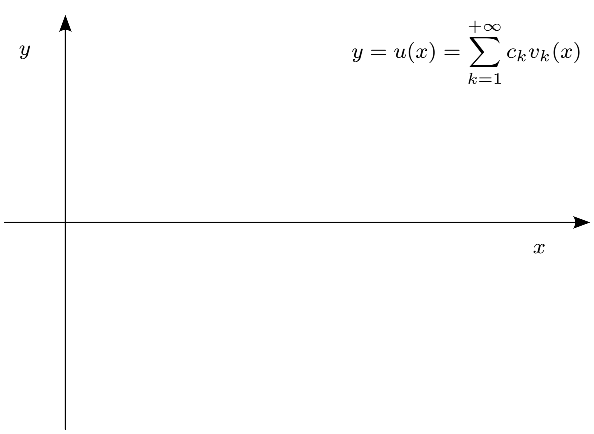
$$\|v_1\| = \dots\dots, \quad \|v_2\| = \dots\dots, \quad \|v_3\| = \dots\dots, \quad \|v_4\| = \dots\dots, \quad \|v_k\| = \dots\dots.$$

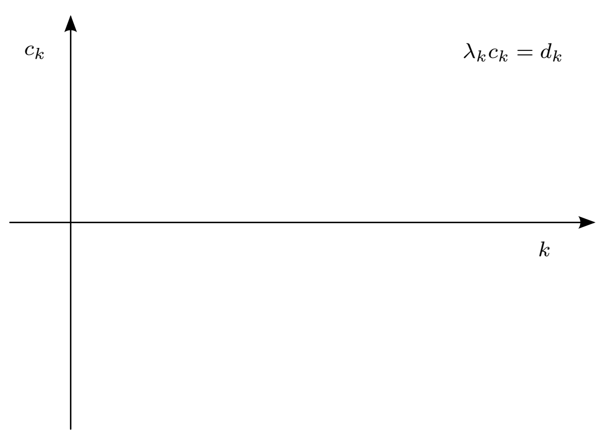
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{x}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (5). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (5).





Příklad 6. Uvažujme okrajovou úlohu $(u = u(x))$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-u'' - \dfrac{4\pi^2}{9}u = \dfrac{|x-1.5|}{2}, \quad x \in (0,3), \\
u(0) = u(3) = 0.
\end{array}
\right. \tag{6}
$$

1. Určete vlastní čísla a vlastní funkce řešením úlohy na vlastní čísla

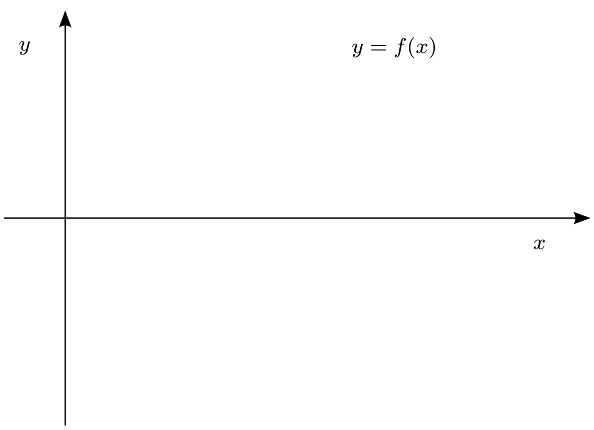
$$
\left\{
\begin{array}{l}
-v'' - \dfrac{4\pi^2}{9}v = \lambda v, \quad x \in (0,3), \\
v(0) = v(3) = 0.
\end{array}
\right.
$$

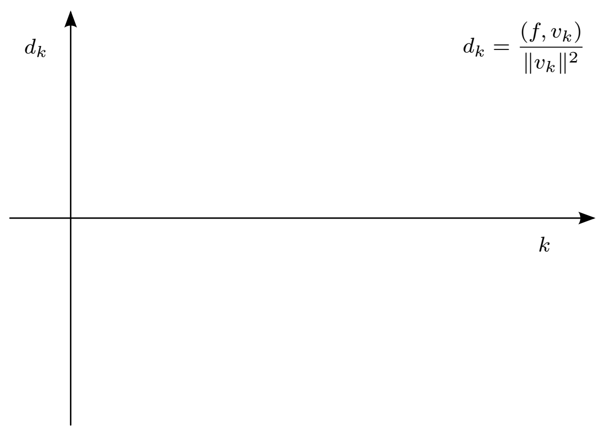
$\lambda_1 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_2 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_3 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_4 = \dots\dots\dots,\quad \lambda_k = \dots\dots\dots,\quad k \in \dots,$

$v_1(x) = \dots\dots\dots,\quad v_2(x) = \dots\dots\dots,\quad v_3(x) = \dots\dots\dots,\quad v_4(x) = \dots\dots\dots,\quad v_k(x) = \dots\dots\dots,$

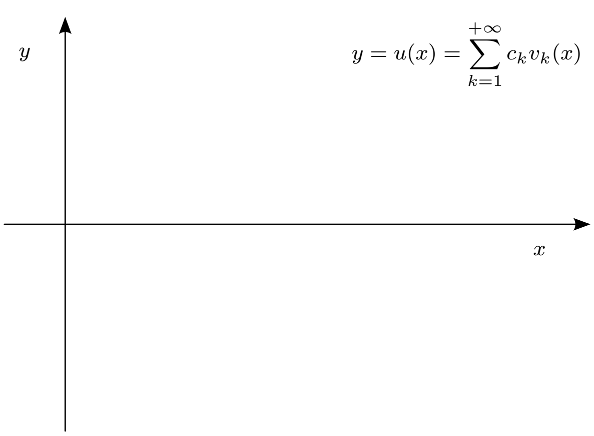
$\|v_1\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_2\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_3\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_4\| = \dots\dots\dots,\quad \|v_k\| = \dots\dots\dots.$

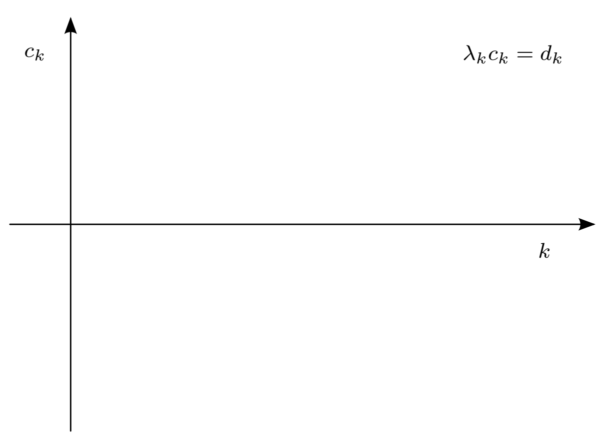
2. Načrtněte graf pravé strany $f(x) = \frac{|x-1.5|}{2}$ a graf posloupnosti (d_k) jejích Fourierových koeficientů:





3. Načrtněte graf posloupnosti (c_k) Fourierových koeficientů řešení u okrajové úlohy (6). Načrtněte graf řešení u okrajové úlohy (6).





Příklad 1. Uvažujme okrajovou úlohu ($u = u(x)$)

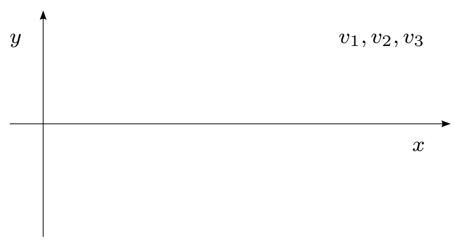
$$\begin{cases} -u'' + u = -x, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Ritzova metoda řešení této okrajové úlohy (7) je ekvivalentní úloze **minimalizovat funkcionál** $\Phi = \Phi(v)$ na množině $V = W_0^{1,2}(0,1)$, kde ($v = v(x)$)

$$\Phi(v) = \int_0^1 \big((v')^2 + v^2 + 2xv \big) \,\mathrm{d}x \quad \Big(= (Lv, v) - 2(f, v) \Big).$$

1. Zvolme tři **polynomiální bázové funkce**, které splňují okrajové podmínky v (7):

$$\begin{aligned} v_1(x) &= x(x-1), \\ v_2(x) &= x^2(x-1), \\ v_3(x) &= x^2(x-1)^2. \end{aligned}$$



   Načrtněte grafy bázových funkcí.

2. Sestavte matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = (Lv_i, v_j)$, a vektor $\mathbf{f} = [f_i]$, $f_i = (v_i, f)$:

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} \doteq \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}.$$

3. Určete řešení $\mathbf{c}$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}$:

$$\mathbf{c} \doteq \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}.$$

4. Sestavte přibližné řešení u_p úlohy (7):

$$u_p(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x) = \dots\dots\dots .$$

5. Načrtněte graf přibližného řešení u_p, určete hodnotu funkcionálu $\Phi(u_p)$ a odhadněte maximální chybu s jakou u_p nesplňuje okrajovou úlohu (7):

$$\begin{aligned} \Phi(u_p) &\doteq \dots\dots\dots, \\ \max_{x \in (0,1)} |Lu_p - f| &\leq \dots\dots\dots . \end{aligned}$$

Příklad 2. Uvažujme okrajovou úlohu ($u = u(x)$)

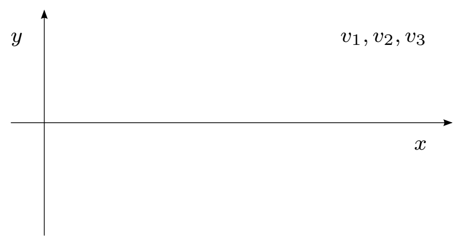
$$\left\{ \begin{aligned} &-u'' + u = 10\sin(x), \quad x \in (0,\pi), \\ &u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Ritzova metoda řešení této okrajové úlohy (8) je ekvivalentní úloze **minimalizovat funkcionál** $\Phi = \Phi(v)$ na množině $V = W_0^{1,2}(0,\pi)$, kde ($v = v(x)$)

$$\Phi(v) = \int_0^{\pi} \left((v')^2 + v^2 - 20\sin(x)v \right) \mathrm{d}x \quad \Big(= (Lv, v) - 2(f, v) \Big).$$

1. Zvolte tři **polynomiální bázové funkce**, které splňují okr. podmínky v (8):

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_2(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_3(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned}$$



Načrtněte grafy bázových funkcí.

2. Sestavte matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = (Lv_i, v_j)$, a vektor $\mathbf{f} = [f_i]$, $f_i = (v_i, f)$:

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} \doteq \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}.$$

3. Určete řešení $\mathbf{c}$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}$:

$$\mathbf{c} \doteq \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}.$$

4. Sestavte přibližné řešení u_p úlohy (8):

$$\begin{aligned} u_p(x) &= c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned}$$

5. Načrtněte graf přibližného řešení u_p, určete hodnotu funkcionálu $\Phi(u_p)$ a odhadněte maximální chybu s jakou u_p nesplňuje okrajovou úlohu (8):

$$\begin{aligned} \Phi(u_p) &\doteq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \max_{x\in(0,\pi)} |Lu_p - f| &\leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned}$$

6. Zvolte **polynomiální bázové funkce** $v_1, \ldots, v_n$ tak, aby $\max\limits_{x\in(0,\pi)} |Lu_p - f| < 0{,}016$:

……………………………………………………………………………………………………

7. Odhadněte velikost rozdílu přesného řešení u a přibližného řešení u_p úlohy (8):

$$u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \max_{x\in(0,\pi)} |u - u_p| < \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Příklad 3. Uvažujme okrajovou úlohu $\left(u = u(x)\right)$

$$
\begin{cases} -u'' + xu = 10\sin(3x), \quad x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{9}
$$

Ritzova metoda řešení této okrajové úlohy (9) je ekvivalentní úloze **minimalizovat funkcionál** $\Phi = \Phi(v)$ na množině $V = W_0^{1,2}(0,\pi)$, kde $\left(v = v(x)\right)$

$$
\Phi(v) = \int_0^{\pi} \left((v')^2 + xv^2 - 20\sin(3x)v \right)\,\mathrm{d}x \quad \Big(= (Lv, v) - 2(f, v) \Big).
$$

1. Určete **goniometrické bázové funkce** $v_1, \dots, v_n$ tak, aby

   $$\max_{x\in(0,\pi)} |Lu_p - f| < 0,005,$$

   kde

   $$u_p(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + \cdots + c_nv_n(x).$$

2. Načrtněte graf přibližného řešení u_p okrajové úlohy (9):