Příklad 1. Metodou **přímé integrace** vyřešte obyčejnou diferenciální rovnici $y'(t) = \mathrm{e}^t \sin t$ a proveďte zkoušku.

Příklad 2. Metodou **separace proměnných** vyřešte obyčejné diferenciální rovnice

1) $y'(t) + 3y(t) = 0,$
2) $(t-1)y'(t) + y^2(t) = 0,$
3) $2ty(t)y'(t) = t + 2,$
4) $y(t)t(1 - y^2(t)) - (1 + t^2)y'(t) = 0.$

Příklad 3. Najděte obecná řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu (použijte metodu **variace konstanty**)

1) $y'(t) + y(t)\cos t = \sin t\,\mathrm{e}^{-\sin t},$
2) $y'(t) + 9y(t) = 3\sin(3t),$
3) $y'(t) = -y(t)\operatorname{tg} t + \dfrac{1}{\cos t},$
4) $y'(t) = 2t^3 + 2ty(t),$
5) $y'(t) + y(t)\cos t = \sin t \cos t,$
6) $y'(t)t + y(t)t^2 = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t > 0.$

Příklad 4. Najděte řešení **Cauchyových počátečních úloh**

1)
$$\begin{cases} u'(t) - 2u(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi) = 0, \end{cases}$$
proveďte zkoušku,

2)
$$\begin{cases} (y^2(t) - 1) + y(t)y'(t)(t^2 - 1) = 0, \quad t > 2, \\ y(2) = 2, \end{cases}$$
proveďte zkoušku a ověřte, zda je řešení definováno pro všechna $t > 2$ (tj. určete definiční obor nalezeného řešení, ověřte, že řešení je pro $t \in (2, +\infty)$ spojité a má spojitou první derivaci).

Příklad 5. Užitím **substituce** vyřešte následující diferenciální rovnice

1) $ty'(t) = t + y(t),$
užijte substituci $u(t) = \frac{y(t)}{t}$,
2) $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y(t)}{t}\right)^2},$
užijte substituci $u(t) = \frac{y(t)}{t}$,
3) $ty'(t) + 2y(t)\ln(y(t)) - 4t^2y(t) = 0,$
užijte substituci $u(t) = \ln(y(t))$,
4) $y'(t) - y(t) + 3t = 5,$
užijte substituci $u(t) = y(t) - 3t + 5$.

Příklad 6. V rovině xy je zadán systém křivek s parametrem C. Tento systém křivek načrtněte. Dále určete a načrtněte **systém kolmých křivek** (sestavte diferenciální rovnice pro oba dva systémy křivek a najděte obecné řešení diferenciální rovnice, která popisuje systém kolmých křivek).

1) $y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R},$
2) $(x - C)^2 + y^2 = C^2 + 1, \quad C \in \mathbb{R},$
3) $\mathrm{e}^x \sin y = C, \quad C \in \mathbb{R},$
4) $y^2 = x - C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Výsledky:

Příklad 1.
1) $y(t) = C + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t),\ C \in \mathbb{R},$

Příklad 2.
1) $y(t) = Ce^{-3t},\ C \in \mathbb{R},$
2) $y(t) = \frac{1}{C - \ln|1-t|},\ C \in \mathbb{R},\ C - \ln|1-t| \neq 0,\ y(t) \equiv 0,$
3) $y^2(t) = t + 2\ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R},$
4) $y^2(t) = \frac{1+t^2}{C+t^2},\ C \in \mathbb{R},\ C + t^2 \neq 0,\ y(t) \equiv 0,$

Příklad 3.
1) $y(t) = \mathrm{e}^{-\sin t}(C - \cos t),\ C \in \mathbb{R},$
2) $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-9t} + \frac{1}{10}(3\sin 3t - \cos 3t),\ C \in \mathbb{R},$

3) $y(t) = C\cos t + \sin t,\ C \in \mathbb{R},\ \cos t \neq 0,$
4) $y(t) = C\,\mathrm{e}^{t^2} - t^2 - 1,\ C \in \mathbb{R},$
5) $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-\sin t} + \sin t - 1,\ C \in \mathbb{R},$
6) $y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\left(C + \ln t\right),\ C \in \mathbb{R},$

Příklad 4.
1) $u(t) = \frac{1}{5}\left(-\,\mathrm{e}^{2t-2\pi} - 2\sin t - \cos t\right),$
2) $y(t) = \sqrt{\frac{2t}{t-1}},$

Příklad 5.
1) $y(t) = t\left(C + \ln|t|\right),\ t \neq 0,\ C \in \mathbb{R},$
2) $y(t) = t\sinh\left(C + \ln|t|\right),\ t \neq 0,\ C \in \mathbb{R},$
3) $y(t) = \mathrm{e}^{\frac{C}{t^2} + t^2},\ C \in \mathbb{R},$
4) $y(t) = C\,\mathrm{e}^t + 3t - 2,,\ C \in \mathbb{R},$

Příklad 6.
1) $2u(x)u'(x) = -x,\ x^2 + 2u^2 + K = 0,\ K \in \mathbb{R},$
2) $(1 + x - u^2(x))u'(x) = 2xu(x),\ x^2 + (u-K)^2 = K^2 - 1,\ K \in \mathbb{R},\ |K| > 1,$
3) $\mathrm{e}^x(u'(x)\sin u(x) - \cos u(x)),\ \mathrm{e}^x\cos u = K,\ K \in \mathbb{R},$ 4) $-2u(x) = u'(x),\ u = K\,\mathrm{e}^{-2x},\ K \in \mathbb{R}.$