Příklad 1. Uvažujme počáteční úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) - 2y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^t + y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Pro každou počáteční úlohu proveďte:

1. Určete prvních pět členů Picardových aproximací řešení počáteční úlohy s volbou nulté aproximace $y_0(t) \equiv 0$.
2. Najděte řešení počáteční úlohy (metodou separace, metodou variace konstanty, ...), najděte rozvoj v mocninnou řadu nalezeného řešení.
3. Ověřte splnění předpokladů Picardovy-Lindelöfovy věty.
4. Na jakém intervalu I zaručuje Picardova-Lindelöfova věta existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy?

Příklad 2. Mějme funkci $f = f(t, y)$ danou po částech

$$f(t,y) = \begin{cases} g(t,y) & \text{pro } (t,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (t,y) = (0,0), \end{cases}$$

přičemž funkci $g = g(t, y)$ postupně uvažujme ve tvaru

$$g(t,y) = \frac{t^7 y}{t^6 + y^6}, \tag{4}$$

$$g(t,y) = \frac{t^7 y^2}{t^8 + y^8}, \tag{5}$$

$$g(t,y) = \frac{y(\mathrm{e}^{\sqrt{2}y} - 1)}{t^2 + y^4}. \tag{6}$$

Označme $D = \langle 0, \alpha \rangle \times \langle -\beta, \beta \rangle,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$. Pro každý z předchozích případů proveďte:

1. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá na D.
2. Rozhodněte, zda je funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ spojitá na D.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ omezená na D.
4. Rozhodněte, zda je funkce f lipschitzovsky spojitá vzhledem k y na D.
5. Rozhodněte o existenci řešení a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Výsledky:

Příklad 1.

(1) 1) $y_0 \equiv 0,\ y_1(t) = \dfrac{t^2}{2},\ y_2(t) = \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2},\ y_3(t) = \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2},\ y_4(t) = \dfrac{t^5}{120} + \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2},$
$y_5(t) = \dfrac{t^6}{720} + \dfrac{t^5}{120} + \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2},$ 2) $y(t) = \mathrm{e}^t - t - 1,\ y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!},\ t \in \mathbb{R},$ 3) $\ell = \max_{t \in \langle 0,\alpha\rangle, u \in \langle -\beta,\beta\rangle} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = 1,$
4) $m = \alpha + \beta,\ h = \min\left\{\alpha, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right\},\ \sup_{\alpha>0,\beta>0} h = 1,\ I = \langle 0, 1),$

(2) 1) $y_0 \equiv 0,\ y_1(t) = t,\ y_2(t) = \dfrac{t^3}{3} - t^2 + t,\ y_3(t) = \dfrac{t^7}{63} - \dfrac{t^6}{9} + \dfrac{t^5}{3} - \dfrac{2t^4}{3} + t^3 - t^2 + t,$ 2) $y(t) = \dfrac{t}{1+t},$
$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+1},\ |t| < 1,$ 3) $\ell = \max_{t \in \langle 0,\alpha\rangle, u \in \langle -\beta,\beta\rangle} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = \max_{u \in \langle -\beta,\beta\rangle} |2u - 2| = 2\beta + 2$
4) $m = \begin{cases} 1 & \text{pro } \beta \le 2, \\ \beta & \text{jinak,} \end{cases},\ h = \begin{cases} \min\{\alpha,\beta\} & \text{pro } \beta \le 2, \\ \min\{\alpha, 1\} & \text{jinak,} \end{cases} \quad \max_{\alpha>0,\beta>0} h = 2,\ I = \langle 0, 2\rangle,$

(3) 1) $y_0 \equiv 0,\ y_1(t) = \mathrm{e}^t - 1,\ y_2(t) = -t + 2\,\mathrm{e}^t - 2,\ y_3(t) = -\dfrac{t^2}{2} - 2t + 3\,\mathrm{e}^t - 3,\ y_4(t) = -\dfrac{t^3}{6} - t^2 - 3t + 4\,\mathrm{e}^t - 4,$
$y_5(t) = -\dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{3t^2}{2} - 4t + 5\,\mathrm{e}^t - 5,$ 2) $y(t) = t\,\mathrm{e}^t, y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n!},\ t \in \mathbb{R},$ 3) $\ell = \max_{t \in \langle 0,\alpha\rangle, u \in \langle -\beta,\beta\rangle} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = 1,$
4) $m = \mathrm{e}^\alpha + \beta,\ h = \min\left\{\alpha, \dfrac{\beta}{\mathrm{e}^\alpha + \beta}\right\},\ \sup_{\alpha>0,\beta>0} h = 1,\ I = \langle 0, 1),$

Příklad 2.

(4) 1) je spojitá (polární souřadnice), $\min_{\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle} (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) = \dfrac{1}{4}$ pro $\varphi = \dfrac{\pi}{4},$ 2) je spojitá (polární souřadnice), $\min_{\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle} (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)^2 = \dfrac{1}{16}$ pro $\varphi = \dfrac{\pi}{4},$ 3) je omezená, 4) je lipschitovsky spojitá vzhledem k y, 5) existuje právě jedno řešení na intervalu I,

(5) 1) je spojitá (polární souřadnice), $\min_{\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle} (\cos^8 \varphi + \sin^8 \varphi) = \dfrac{1}{8}$ pro $\varphi = \dfrac{\pi}{4},$ 2) není spojitá (polární souřadnice), 3) je omezená, 4) je lipschitovsky spojitá vzhledem k y, 5) existuje řešení na intervalu I, o jednoznačnosti neumíme rozhodnout.

(6) 1) není spojitá (po přímce $t = 0$, l'Hospitalovo pravidlo), $\lim_{t=0, y \to 0} \dfrac{y(\mathrm{e}^{\sqrt{2}y} - 1)}{t^2 + y^4} = \lim_{y \to 0} \dfrac{(\mathrm{e}^{\sqrt{2}y} - 1)}{y^3}$
$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y \to 0} \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}y}}{3y^2} = +\infty,$ 2) není spojitá, 3) není omezená, 4) není lipschitovsky spojitá vzhledem k y, 5) neumíme rozhodnout.