Příklad 1. Rozhodněte o lokální a globání existenci a jednoznačnosti řešení počátečních úloh:

1) $\begin{cases} y'(t) = ty(t), & t \in I, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'(t) = t\sqrt{y(t)}, & t \in I, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'(t) = t^2 y^2(t), & t \in I, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Příklad 2. Mějme následující počáteční úlohu

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), & t \in I, \\ y_2'(t) = 2\, y_1(t), & t \in I, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu (1) zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \in I, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ spojitá na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$. Pokud ano, určete konstantu lipschitzovskosti ℓ (v odhadu využijte Euklidovskou normu vektoru).
4. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy (1).
5. Určete prvních pět členů Picardových aproximací řešení počáteční úlohy (1) s volbou nulté aproximace $\mathbf{y}_0(t) \equiv \mathbf{y}_0$.
6. Určete limitní vektorovou funkci $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ posloupnosti Picardových aproximací $(\mathbf{y}_n(t))$.
7. Převeďte počáteční úlohu (1) na počáteční úlohu pro jednu diferenciální rovnici druhého řádu.
8. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice druhého řádu z předchozího bodu.

Příklad 3. Uvažujme Cauchyovu úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 3y_2(t), & t \in I, \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 6y_2(t), & t \in I, \\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 4. \end{cases} \tag{2}$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu (2) zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \in I, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy (2).
4. Určete první dvě Picardovy aproximace řešení úlohy (2) s volbou nulté aproximace $\mathbf{y}_0(t) = (2, 4)^T$.

Příklad 4. Mějme následující počáteční úlohu

$$
\begin{cases}
y_1'(t) = y_2(t) + t, \quad t \in I,\\
y_2'(t) = y_1(t) + t, \quad t \in I,\\
y_1(0) = 2,\\
y_2(0) = -2.
\end{cases} \tag{3}
$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu (1) zapsat ve tvaru

$$
\begin{cases}
\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \in I,\\
\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.
\end{cases}
$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ spojitá na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$. Pokud ano, určete konstantu lipschitzovskosti ℓ (v odhadu využijte Euklidovskou normu vektoru).
4. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy (1).
5. Určete prvních pět členů Picardových aproximací řešení počáteční úlohy (1) s volbou nulté aproximace $\mathbf{y}_0(t) \equiv \mathbf{y}_0$.
6. Určete limitní vektorovou funkci $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ posloupnosti Picardových aproximací $(\mathbf{y}_n(t))$.
7. Převeďte počáteční úlohu (3) na počáteční úlohu pro jednu diferenciální rovnici druhého řádu.
8. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice druhého řádu z předchozího bodu.

Příklad 5. Mějme následující počáteční úlohu

$$
\begin{cases}
y_1'(t) = y_2(t), & t \in I,\\
y_2'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}\, y_1(t) + \dfrac{2t}{1-t^2}\, y_2(t), & t \in I,\\
y_1(0) = 1,\\
y_2(0) = 0.
\end{cases} \tag{4}
$$

1. Určete $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}_0$ tak, abychom mohli počáteční úlohu (1) zapsat ve tvaru

$$
\begin{cases}
\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \in I,\\
\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.
\end{cases}
$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ spojitá na $I \times \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda je funkce $\mathbf{f}$ globálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné na $I \times \mathbb{R}^2$. Pokud ano, určete konstantu lipschitzovskosti ℓ (v odhadu využijte Euklidovskou normu vektoru).
4. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy (4).

Výsledky:

Příklad 1. 1) a) globální existence: $\ell = \max\{|t_1|, |t_2|\}$, existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle t_1, t_2\rangle \subset \mathbb{R}$, b) lokální existence: $\ell = \alpha,\ m = \alpha\beta,\ h = \alpha$, existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle 0, \alpha\rangle,\ \alpha > 0$,

2) f není na $D = \langle 0, \alpha\rangle \times \langle -\beta, \beta\rangle$ definována. Tedy nemáme zaručenu ani lokální existenci řešení. Výpočtem (metodou separace) získáme dvě řešení $y(t) = \dfrac{t^4}{16}, t > 0,\ y(t) \equiv 0$, celkem má úloha nekonečně mnoho řešení ve tvaru $y(t) =$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{t^2}{4} - C\right)^2 & \text{pro } t > \sqrt{4C}, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq t \leq \sqrt{4C}, \end{cases}$$

3) a) globální existence: $\max\limits_{t\in\langle t_1,t_2\rangle, u\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,u)\right| = \max\limits_{t\in\langle t_1,t_2\rangle, u\in\mathbb{R}} \left|2t^2 u\right|$ neexistuje, b) lokální existence: $\ell = 2\alpha^2\beta,\ m = \alpha^2\beta^2,\ h = \min\left\{\alpha, \dfrac{1}{\alpha^2\beta}\right\},\ \max\limits_{\alpha>0,\beta>0} h = \alpha$ pro $\beta = \dfrac{1}{\alpha^3}$, tedy existuje právě jedno řešení na intervalu $I = \langle 0, \alpha\rangle$, $\alpha > 0$,

Příklad 5. $\mathbf{f}$ je spojitá na $D = \langle 0, \alpha\rangle \times \langle 1-\beta, 1+\beta\rangle \times \langle -\beta, +\beta\rangle,\ 0 < \beta < +\infty, 0 < \alpha < 1,\ \ f$ je lipschitzovsky spojitá vzhledem k druhé proměnné y s konstantou lipschitzovskosti $\ell = \max\limits_{t\in\langle 0,\alpha\rangle} \|\mathbf{A}(t)\| = \max\limits_{t\in\langle 0,\alpha\rangle} \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(\dfrac{1}{1-t^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(\dfrac{1}{1-\alpha^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)^2}$, tedy lokálně existuje právě jedno řešení na intervalu I.

$$m = \max\left\{\max_{y_2\in\langle -\beta,\beta\rangle} y_2, \max_{t\in\langle 0,\alpha\rangle, y_1\in\langle 1-\beta,1+\beta\rangle, y_2\in\langle -\beta,+\beta\rangle} \left(\frac{1}{1-t^2}\, y_1 + \frac{2t}{1-t^2}\, y_2\right)\right\} = \frac{1}{1-\alpha^2}(1+\beta) + \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\beta,$$

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\frac{1}{1-\alpha^2}(1+\beta) + \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\beta}\right\},\ \sup_{0<\alpha<1, 0<\beta<+\infty} h = \frac{1}{6}\left(\sqrt{13}-1\right) \doteq 0.434259, \text{ tedy } I = \left\langle 0, \frac{1}{6}\left(\sqrt{13}-1\right)\right\rangle.$$