

Příklad 1. Najděte všechna řešení Cauchyových počátečních úloh

$$1) \begin{cases} y''(t) + 11y'(t) + 24y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, y'(0) = -7, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 16y''(t) - 40y'(t) + 25y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 3, y'(0) = -\frac{9}{4}, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 9y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, y'(0) = -8, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0, y'(-1) = 2. \end{cases}$$

Příklad 2. Metodou **variacie konstant** vyřešte diferenciální rovnice

$$1) y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$3) y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$2) y''(t) - y(t) = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$4) y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{e^t}{t^2 + 1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Metodou **odhadu** (neurčitých koeficientů) vyřešte diferenciální rovnice

$$1) y''(t) - y(t) = t,$$

$$3) y''(t) + 2y'(t) = \sin(2t),$$

$$2) y''(t) + 4y(t) = e^t \cos(2t),$$

$$4) y''(t) + y(t) = t + \sin t.$$

Příklad 4. Najděte obecné řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty

$$y^{(4)}(t) + 2y''(t) + 8y'(t) + 5y(t) = 0.$$

Příklad 5. Je dána charakteristická rovnice

$$(\alpha - 2)^3(\alpha - i)(\alpha + i) = 0.$$

Najděte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, která má tuto charakteristickou rovnici. Najděte fundamentální systém.

Příklad 6. Najděte řešení lineární homogenní Eulerovy diferenciální rovnice 3. řádu

$$t^3 y'''(t) + t y'(t) - y(t) = 0, \quad t > 0.$$

Příklad 7. Metodou **snižování řádu** najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + \frac{t-3}{t} y'(t) - \frac{t-3}{t^2} y(t) = 0,$$

znáte-li jedno řešení $y(t) = t$.

Výsledky:**Příklad 1.**

$$1) y(t) = \frac{7}{5}(e^{-8t} - e^{-3t}), \quad 2) y(t) = -\frac{8}{\sqrt{5}} e^{2t} \sin \sqrt{5}t, \quad 3) y(t) = e^{\frac{5}{4}t}(3 - 6t), \quad 4) y(t) = 2e^{-3-3t}(1+t),$$

Příklad 2.

$$1) y(t) = e^{-t} \left(C_1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}t \right) + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 2) y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{\sin t}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
$$3) y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{10}(\cos t + 3 \sin t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 4) y(t) = e^t \left(C_1 + C_2 t + t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

Příklad 3.

$$1) y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 2) y(t) = \cos 2t \left(C_1 + \frac{1}{17} e^t \right) + \sin 2t \left(C_2 + \frac{4}{17} e^t \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
$$3) y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 - \frac{1}{8}(\cos 2t + \sin 2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 4) y(t) = t + \cos t \left(C_1 - \frac{t}{2} \right) + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

Příklad 4.

$$y(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t) + e^t(C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

Příklad 5.

$$y^{(5)}(t) - 6y^{(4)}(t) + 13y'''(t) - 14y''(t) + 12y'(t) - 8y(t) = 0,$$

Příklad 6.

$$y(t) = t(C_1 + C_2 \ln t + C_3 \ln^2 t), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

Příklad 7.

$$y(t) = C_1 t + C_2 e^{-t}(t^2 + t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$