Příklad 1. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$
\left\{
\begin{aligned}
y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + a_{13}y_3(t),\\
y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + a_{23}y_3(t),\\
y_3'(0) &= a_{31}y_1(t) + a_{23}y_2(t) + a_{33}y_3(t),
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{33} \in \mathbb{R}$. Úlohu (1) zapíšeme ve tvaru

$$
\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t),
\tag{2}
$$

kde $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T$, $\mathbf{y}'(t) = [y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t)]^T$ a

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.
$$

Uvažujme následující matice $\mathbf{A}$:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Najděte všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ a (pokud existuje) řetězec zobecněných vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Určete obecné řešení soustavy (2).

Příklad 2. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty:

1) $\left\{ \begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t),\\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) + y_3(t),\\ y_3'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \end{aligned} \right.$

2) $\left\{ \begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t),\\ y_2'(t) &= 2y_2(t) + 4y_3(t),\\ y_3'(t) &= y_1(t) - y_3(t). \end{aligned} \right.$

Výsledky:

Příklad 1.

1) $y_1(t) = C_3\,\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = C_2\,\mathrm{e}^{2t},\ y_3(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$

2) $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_2 + C_3 t),\ y_2(t) = C_3\,\mathrm{e}^{2t},\ y_3(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$

3) $y_1(t) = C_2\,\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_1 + C_3 t),\ y_3(t) = C_3\,\mathrm{e}^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$

4) $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(C_1 + C_2 t + \dfrac{1}{2}C_3 t^2\right),\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_2 + C_3 t),\ y_3(t) = C_3\,\mathrm{e}^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Příklad 2.

1) $y_1(t) = -C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - C_3\,\mathrm{e}^{-t},\ y_2(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - C_3\,\mathrm{e}^{-t},\ y_3(t) = 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{-t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$

2) $y_1(t) = 4C_1 e^{3t} + C_2 + C_3(t+1),\ y_2(t) = 4C_1 e^{3t} - 2C_2 + C_3(-2t-1),\ y_3(t) = C_1 e^{3t} + C_2 + C_3 t,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$