Příklad 1. Uvažujme soustavu

$$\left\{\begin{aligned} y_1'(t) &= a\cdot y_1(t) + b\cdot y_2(t), \quad t>0,\\ y_2'(t) &= c\cdot y_1(t) + d\cdot y_2(t), \quad t>0, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Úlohu (1) zapišme ve tvaru $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$, kde

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T, \qquad \mathbf{y}'(t) = [y_1'(t), y_2'(t)]^T, \qquad \text{a} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Uvažujme následující matice $\mathbf{A}$:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$,
5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
9) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$,
6) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
10) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$,

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$,
7) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
11) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$,
8) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,
12) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Najděte řešení uvažované soustavy.
2. Rozhodněte o stabilitě počátku.
3. Načrtněte fázový portrét.
4. Zobrazte fázový portrét pomocí systému `Matlab` nebo `Mathematica`.

Příklad 2. Uvažujme následující soustavy

$$\left\{\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t) + 1,\\ y_2'(t) &= 4y_1(t) + 2y_2(t) - 3, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t)(1 - y_1^2(t) - 6y_2^2(t)),\\ y_2'(t) &= y_2(t)(1 - 3y_1^2(t) - 3y_2^2(t)). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

1. Určete všechny klidové stavy.
2. Rozhodněte o stabilitě nalezených klidových stavů.
3. Načrtněte fázové portréty (zvýrazněte polohu klidových stavů).