Příklad 1. Uvažujme soustavu

1) $$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -\sin(y_1(t)) - 3y_2(t), \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} y_1'(t) = y_2^2(t) - 1, \\ y_2'(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) - 2, \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y_1'(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) - 25, \\ y_2'(t) = y_1(t)y_2(t) - 12, \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t), \\ y_2'(t) = y_1^3(t) - y_1(t) - y_1(t)y_2(t). \end{cases}$$

1. Určete všechny klidové stavy.
2. Rozhodněte o stabilitě klidových stavů.
3. Znázorněte fázové portréty (zvýrazněte polohu klidových stavů).

Příklad 2. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1^3(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) = y_2(t)(y_1^2(t) + y_2(t) - 2). \end{cases}$$

1. Rozhodněte o stabilitě počátku.
2. Znázorněte fázový portrét.

Výsledky:
Příklad 1.
1) Klidové stavy: $\mathbf{y}_k = [k\pi, 0]^T, k \in \mathbb{Z}$. Jacobiho matice zobrazení je

$$\mathbf{J}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos y_1 & -3 \end{bmatrix},$$

tedy $\mathrm{tr}(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = -3$, $\det(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = \cos y_1$. Pro k sudé je klidový stav $\mathbf{y}_k$ stabilní, pro k liché je klidový stav $\mathbf{y}_k$ nestabilní.

2) $T(y_1, y_2) = \mathrm{tr}(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = 2y_2$, $D(y_1, y_2) = \det(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = -4y_1y_2$.
Pro $\mathbf{y}_1 = [1, 1]^T$ je $D(1, 1) < 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_2 = [-1, -1]^T$ je $D(-1, -1) < 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_3 = [1, -1]^T$ je $D(1, -1) > 0$, $T(1, -1) < 0$, tedy jedná se o stabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_4 = [-1, 1]^T$ je $D(-1, 1) > 0$, $T(-1, 1) > 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav.

3) $T(y_1, y_2) = \mathrm{tr}(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = 3y_1$, $D(y_1, y_2) = \det(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = 2(y_1^2 - y_2^2)$.
Pro $\mathbf{y}_1 = [3, 4]^T$ je $D(3, 4) < 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_2 = [-3, -4]^T$ je $D(-3, -4) < 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_3 = [4, 3]^T$ je $D(4, 3) > 0$, $T(4, 3) > 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_4 = [-4, -3]^T$ je $D(-4, -3) > 0$, $T(-4, -3) < 0$, tedy jedná se o stabilní klidový stav.

4) $T(y_1, y_2) = \mathrm{tr}(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = -y_1$, $D(y_1, y_2) = \det(\mathbf{J}(y_1, y_2)) = 3y_1^2 - 1 - y_2$.
Pro $\mathbf{y}_1 = [0, 0]^T$ je $D(0, 0) < 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_2 = [1, 0]^T$ je $D(1, 0) > 0$, $T(1, 0) < 0$, tedy jedná se o stabilní klidový stav. Pro $\mathbf{y}_3 = [-1, 0]^T$ je $D(-1, 0) > 0$, $T(-1, 0) > 0$, tedy jedná se o nestabilní klidový stav.

Příklad 2.
Jedno vlastní číslo matice

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

je nulové, druhé záporné, tedy nemůžeme pomocí linearizace rozhodnout. Využijeme vzdálenost od počátku. Pro $y_2 = 0$ získáme pouze jednu rovnici

$$y_1'(t) = y_1^3(t),$$

která je nezávislá na proměnné y_2. Pro $y_1 > 0$ je derivace vzdálenosti od počátku

$$r(y_1, 0) = \frac{y_1^4}{|y_1|} = y_1^3 > 0,$$

tedy v tomto směru se vzdálenost od počátku zvětšuje. Současně pro řešení, pro které někde platilo $y_2 = 0$, už bude vždy platit $y_2 = 0$. Tedy počátek $(0, 0)$ je nestabilní klidový stav.