Příklad 1. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

1) $y'(t) = \mu y(t) - y^2(t)$,
2) $y'(t) = \mu y(t) - y^3(t)$,
3) $y'(t) = y(t)(4 - y(t)) - \mu$,
4) $y'(t) = y(t)(y(t) - 1) - \mu$,
5) $y'(t) = \mu y(t) + y^3(t) - y^5(t)$,
6) $y'(t) = 2 - 3\,y(t) + y^2(t) + \mu - \mu y(t) + 2\,\mu^2 - \mu^2 y(t) + \mu^3$,

kde $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Určete klidové stavy.
2. Rozhodněte o stabilitě všech klidových stavů v závislosti na hodnotě μ.
3. Načrtněte všechny kvalitativně odlišné fázové portréty.
4. V rovině (μ, y) načrtněte bifurkační diagram.
5. Určete bifurkační body.

Příklad 2. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1^2(t) + \mu, \\ y_2'(t) = -y_2(t). \end{cases}$$

1. Určete klidové stavy.
2. Rozhodněte o stabilitě všech klidových stavů v závislosti na hodnotě μ.
3. Načrtněte všechny kvalitativně odlišné fázové portréty.
4. V rovině (μ, y_1) načrtněte bifurkační diagram.
5. Určete bifurkační body.

Příklad 3. Matematický model chovu kaprů s odlovem v rybníce má tvar počáteční úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{k}\right) - b, \qquad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

kde $y(t)$ je celková hmotnost všech kaprů v čase t, r je koeficient jejich růstu, b je hmotnost všech vylovených kaprů za jednotku času a k je celková kapacita rybníka.

1. Uvažujme $b = \dfrac{kr}{6}$ a $y(0) = k$ (v čase $t = 0$ je rybník zcela zaplněn).

   Na jaké hodnotě se ustálí celková hmotnost všech kaprů v rybníce v dlouhodobém horizontu, tj. pro $t \to +\infty$?

Své rozhodnutí podrobně zdůvodněte. Při zdůvodnění nepoužívejte řešení počáteční úlohy (1), ale vlastností diferenciální rovnice v (1) (využijte teorii stability).
