

Příklad 1. Najděte všechna řešení (pokud řešení existuje) okrajové úlohy

$$1) \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0, & t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \\ y(0) = -2, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y''(t) + 25y(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ y'(0) = 6, \\ y'(\pi) = -9, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0, & t \in (0, 2\pi), \\ y(0) = -2, \\ y(2\pi) = -2, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y''(t) + 9y(t) = \cos t, & t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ y'(0) = 5, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3}, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0, & t \in (0, 2\pi), \\ y(0) = -2, \\ y(2\pi) = 3, \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y''(t) + 3y(t) = 0, & t \in (0, 2\pi), \\ y(0) = 0, \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y''(t) + 3y(t) = 0, & t \in (0, 2\pi), \\ y(0) = 7, \\ y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

Příklad 2. Určete vlastní čísla a vlastní funkce operátoru L

$$(Ly)(t) := -y''(t),$$

$$D(L) := \{y \in (C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)) : y'(0) = y'(1) = 0\},$$

tj. najděte všechny hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že úloha

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, & t \in (0, 1), \\ y'(0) = 0, \\ y'(1) = 0, \end{cases}$$

má netriviální řešení.

Příklad 3. Určete vlastní čísla a vlastní funkce operátoru L

$$(Ly)(t) := -y''(t),$$

$$D(L) := \{y \in (C^1(\langle 0, 8 \rangle) \cap C^2(0, 8)) : y'(0) = y'(8) = 0\}.$$

Příklad 4. Určete vlastní čísla a vlastní funkce operátoru L

$$(Ly)(t) := -y''(t) - 3y(t),$$

$$D(L) := \{y \in (C^1(\langle 0, 8 \rangle) \cap C^2(0, 8)) : y'(0) = y'(8) = 0\}.$$

Výsledky:**Příklad 1.**

1) $y(t) = -2 \cos(2t) + 10 \sin(2t)$, 2) nekonečně mnoho řešení ve tvaru $y(t) = -2 \cos(2t) + C \sin(2t)$, $C \in \mathbb{R}$, 3) neexistuje řešení, 4) $y(t) = 7 \cos(\sqrt{3}t) - 7 \cotg(2\sqrt{3}\pi) \sin(\sqrt{3}t)$, 5) neexistuje řešení, 6) nekonečně mnoho řešení ve tvaru $y(t) = C \cos(3t) + \frac{5}{3} \sin(3t) + \frac{1}{8} \cos t$, $C \in \mathbb{R}$, 7) $y(t) = 0$,

Příklad 2.

Vlastní čísla operátoru L mají tvar $\lambda_k = (k\pi)^2$ a příslušné vlastní funkce mají tvar $y_k(t) = \cos(k\pi t)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

Příklad 3.

Vlastní čísla operátoru L mají tvar $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{8}\right)^2$ a příslušné vlastní funkce mají tvar $y_k(t) = \cos\left(\frac{k\pi}{8}t\right)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

Příklad 4.

Vlastní čísla operátoru L mají tvar $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{8}\right)^2 - 3$ a příslušné vlastní funkce mají tvar $y_k(t) = \cos\left(\frac{k\pi}{8}t\right)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.