

Ritzova metoda

(pro $Lu=f$)

http://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Ritz

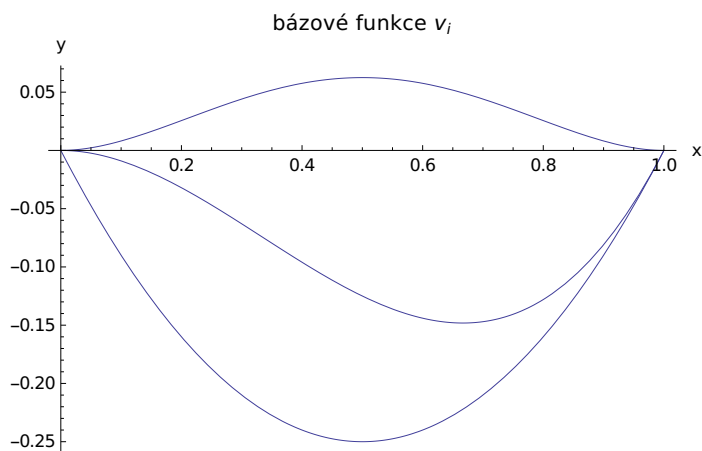
definice operátoru L , pravé strany f , intervalu (a,b) a funkcionálu Φ

```
L[u_] := -D[u, {x, 2}] + u
f[x_] = -x;
a = 0;
b = 1;
Φ[u_] := Integrate[L[u] * u - 2 * f[x] * u, {x, a, b}]
```

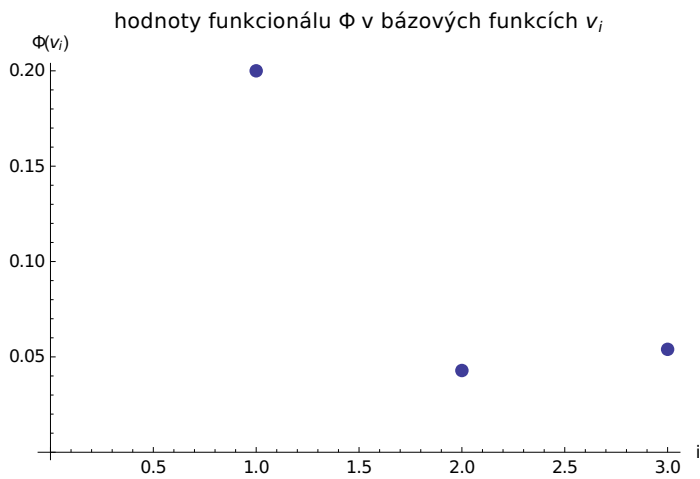
volba bázových funkcí

```
VN = {x (x - 1), x^2 (x - 1), x^2 (x - 1)^2}
```

```
n = Length[VN];
gr1 = Show[Table[Plot[VN[[i]], {x, a, b}, PlotRange -> All,
  PlotLabel -> "bázové funkce vi", AxesLabel -> {"x", "y"}], {i, 1, n}]]
{(-1 + x) x, (-1 + x) x^2, (-1 + x)^2 x^2}
```



```
gr2 = ListPlot[Table[ϕ[VN[i]], {i, 1, n}],
  PlotLabel -> "hodnoty funkcionálu ϕ v bázových funkcích vi",
  AxesLabel -> {"i", "ϕ(vi)"}, PlotStyle -> {PointSize[Large]}]
```



sestavení soustavy $A c = F$

```
A = Table[Integrate[L[VN[i]] * VN[j], {x, a, b}], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
```

$$\left\{ \left\{ \frac{11}{30}, \frac{11}{60}, -\frac{31}{420} \right\}, \left\{ \frac{11}{60}, \frac{1}{7}, -\frac{31}{840} \right\}, \left\{ -\frac{31}{420}, -\frac{31}{840}, \frac{13}{630} \right\} \right\}$$

```
F = Table[Integrate[f[x] * VN[i], {x, a, b}], {i, 1, n}]
```

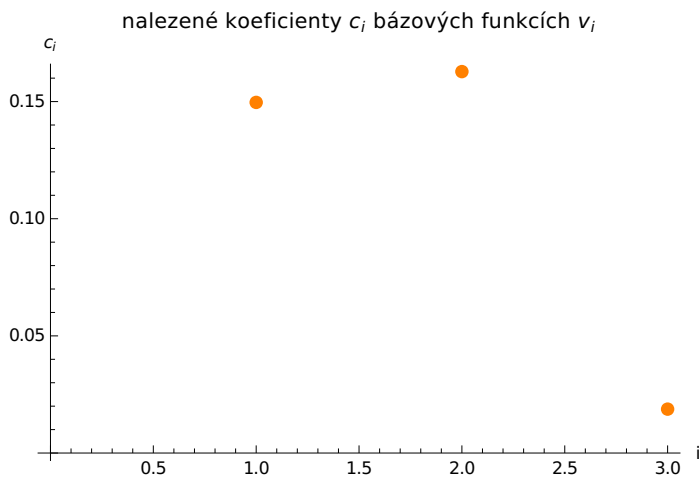
$$\left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{60} \right\}$$

řešení soustavy $A c = F$

```
c = LinearSolve[A, F]
```

$$\left\{ \frac{14427}{96406}, \frac{7}{43}, \frac{21}{1121} \right\}$$

```
ListPlot[c, PlotLabel -> "nalezené koeficienty ci bázových funkcí vi",
  AxesLabel -> {"i", "ci"}, PlotStyle -> {Orange, PointSize[Large]]]
```

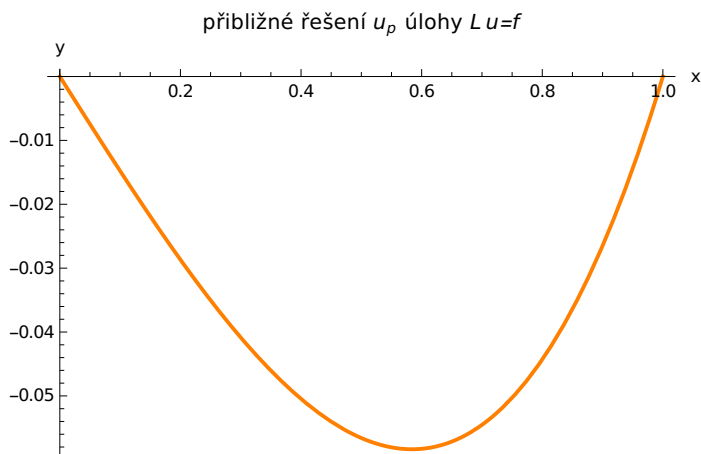


sestavení přibližného řešení úlohy $Lu = f$

```
up[x_] = Sum[c[[i]] VN[[i]], {i, 1, n}]
```

$$\frac{14\,427(-1+x)x}{96\,406} + \frac{7}{43}(-1+x)x^2 + \frac{21(-1+x)^2x^2}{1121}$$

```
gr3 = Plot[up[x], {x, a, b}, PlotLabel -> "přibližné řešení up úlohy Lu=f",
  AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotStyle -> {Thick, Orange}]
```



hodnota funkcionálu Φ v přibližném řešení u_p (minimální hodnota)

```
minimum =  $\Phi$ [up[x]]
```

```
N[minimum, 16]
```

```
-  $\frac{39\,137}{1\,928\,120}$ 
```

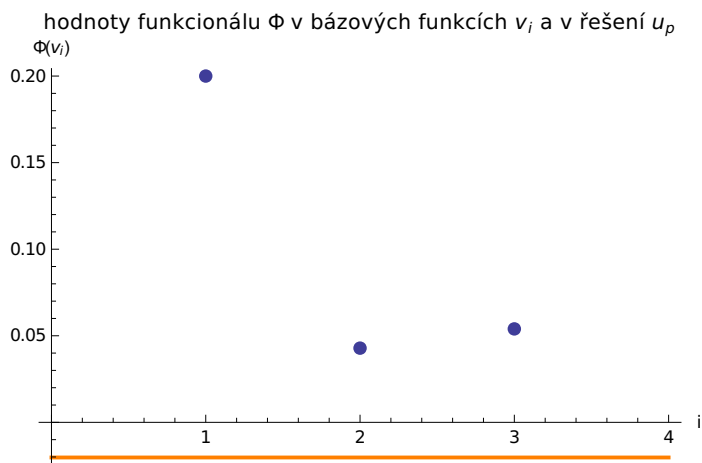
```
-0.02029801049727195
```

```
gr4 = Plot[minimum, {x, 0, n+1},
```

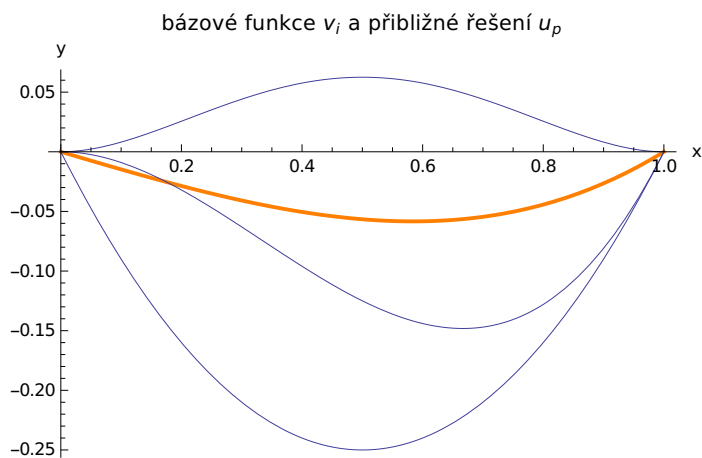
```
  PlotLabel  $\rightarrow$  "hodnoty funkcionálu  $\Phi$  v bázových funkcích  $v_i$  a v řešení  $u_p$ ",
```

```
  AxesLabel  $\rightarrow$  {"i", " $\Phi(v_i)$ "}, PlotStyle  $\rightarrow$  {Thick, Orange}];
```

```
Show[gr4, gr2, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```



```
Show[gr3, gr1, PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotLabel  $\rightarrow$  "bázové funkce  $v_i$  a přibližné řešení  $u_p$ "]
```



chyba přibližného řešení

```
chyba[x_] = FullSimplify[L[up[x]] - f[x]]
```

$$\frac{1}{96406} (-1078 + x (9487 + 7 x (-3019 + 2 x (863 + 129 x))))$$

```
Plot[Abs[chyba[x]], {x, a, b}, AxesLabel -> {"x", "y"},
PlotLabel -> "chyba přibližného řešení u_p", PlotRange -> All, PlotStyle -> Red]
```

