UFA — zkoušková práce — ukázková **2021**

Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

celkem bodů (max 50)

hodnocení

dobře ... **25** až 34   velmi dobře ... **35** až 44   výborně ... **45** až 50

Příklad 1. [4 body]

Mějme metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ), kde

$$X = (-\infty; 0), \quad \varrho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \qquad \text{a} \qquad Y = (1; +\infty), \quad \sigma(y_1, y_2) = 2 \cdot |y_1 - y_2|.$$

Ukažte, že tyto prostory jsou izometrické.

Příklad 2. [4 body]

Mějme prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$.

Rozhodněte, zda je množina $M := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 \leq 2\big\}$ kompaktní.

Příklad 3. [4 body]

Uvažujme následující prostory: $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ a $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$,

kde c_{00} je množina všech posloupností, které mají jen konečně mnoho členů nenulových.

Určete všechny prostory, které jsou úplné.

Příklad 4. [4 body]

Mějme prostor $(\ell^2, (\cdot, \cdot))$ a operátor $T : \ell^2 \to \ell^2$ definovaný předpisem

$$T\big(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\big) := \big(\mathrm{i}\, x_2, x_3, \mathrm{i}\, x_4, x_5, \mathrm{i}\, x_6, \dots\big).$$

Určete adjungovaný operátor T^* a jeho normu $\|T^*\|$.

Příklad 5. [4 body]

Mějme Banachův prostor $(C(\langle -1; 1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ a operátor $T : C(\langle -1; 1\rangle) \to C(\langle -1; 1\rangle)$

definovaný předpisem

$$(Tf)(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.

Úkol 1. Banachův princip pevného bodu [15 bodů]

1. Formulujte Banachovu větu o pevném bodě.
2. Popište princip jejího důkazu a objasněte důležitost předpokladů v této větě.
3. Ukažte použití této věty na Cauchyovu počáteční úlohu.

Úkol 2. Fourierovy řady [15 bodů]

1. Popište konstrukci abstraktní Fourierovy řady v Hilbertově prostoru.
2. Vysvětlete vztah mezi Fourierovou řadou a prvkem, který byl do této řady rozvinut.
3. Který prostor je izometricky izomorfní s prostorem ℓ^2? Zdůvodněte.