Příklad 3.1. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = l^\infty$ a $\varrho_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

Dále mějme množinu $M \subset X$ definovanou jako

$$M = \left\{ x \in X : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\}.$$

1. Ukažte, že množina M nemá žádný izolovaný bod.
   (Nápověda: Ukažte, že každý bod $x \in M$ je hromadným bodem M.)
2. Ukažte, že množina M nemá žádný vnitřní bod.
   (Nápověda: Ukažte, že každý bod $x \in M$ je hraničním bodem M.)

Příklad 3.2. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = C(\langle 0; 1\rangle)$ a $\varrho_\infty(f,g) = \sup_{x\in\langle 0;1\rangle} |f(x) - g(x)|$.

Dále mějme množinu $M \subset X$ definovanou jako

$$M = \left\{ f \in X : \ f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Ukažte, že množina M je uzavřená. (Nápověda: Ukažte, že množina M obsahuje všechny svoje limitní body.)

Příklad 3.3. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = C(\langle 0; 1\rangle)$ a $\varrho_\infty(f,g) = \sup_{x\in\langle 0;1\rangle} |f(x) - g(x)|$.

Dále mějme množinu $M \subset X$ definovanou jako

$$M = \left\{ f \in X : \ f \text{ je prostá} \right\}.$$

Ukažte, že množina M není uzavřená. (Nápověda: Najděte bod $f \in X$, který je limitním bodem M a $f \notin M$.)

Příklad 3.4. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = C(\langle -1; 1\rangle)$ a $\varrho_\infty(f,g) = \sup_{x\in\langle -1;1\rangle} |f(x) - g(x)|$.

Dále mějme dvě množiny $M_1, M_2 \subset X$ definované jako

$$M_1 = \left\{ f \in X : \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ f \in X : \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \right\}.$$

Ukažte, že $\overline{M_1} = M_2$. (Nápověda: Ukažte, že každý bod $f \in M_2$ je limitním bodem M_1.)

Příklad 3.5. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ), kde $X = \mathbb{R}$ a metrika ρ je dána jako

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x-y| \text{ iracionální}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } |x-y| \text{ nenulové racionální}, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je tento metrický prostor (X, ϱ) úplný.