Příklad 4.1. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ), kde $X = \mathbb{R}$ a $\varrho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

Ukažte, že prostor (X, ϱ) není úplný.

(Nápověda: Ukažte, že posloupnost (x_n), kde $x_n = n$, je cauchyovská v (X, ϱ), ale není konvergentní v (X, ϱ).)

Příklad 4.2. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = l^\infty$ a $\varrho_\infty(x, y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

Dále mějme množinu M všech posloupností $x = (x_n)$, jejichž členy x_n jsou vždy rovny buďto jedničce 1 nebo nule 0.

Rozhodněte, zda je metrický prostor (M, ϱ_∞) úplný.

(Nápověda: Nejprve určete, jakých hodnot může nabývat metrika ϱ_∞ na $M \times M$.)

Příklad 4.3. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = l^\infty$ a $\varrho_\infty(x, y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

Dále mějme množinu $M \subset X$ definovanou jako

$$M = \left\{ (x_n) \in X : \lim_{n \to +\infty} x_n = 5 \right\}.$$

Rozhodněte, zda je metrický prostor (M, ϱ_∞) úplný.

(Nápověda: Rozhodněte, zda je množina M uzavřená v prostoru (X, ϱ_∞).)

Příklad 4.4. **[2 body]**

Mějme dva metrické prostory (X, ϱ_2) a $(X, \varrho_\star)$, kde $X = \mathbb{R}^2$, ρ_2 je euklidovská metrika a metrika $\varrho_\star$ je dána jako

$$\varrho_\star(x, y) = \begin{cases} \varrho_2(x, y), & \text{pokud } \exists\, k > 0 :\ y = kx, \\ \varrho_2(x, 0) + \varrho_2(0, y) & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Dále mějme posloupnost bodů $(a_n) \subset X$, kde $a_n = (x_n, y_n) = \left(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}\right)$, a bod $a_0 = (1, 0)$.

1. Rozhodněte, zda platí $a_n \xrightarrow{\varrho_2} a_0$.
2. Rozhodněte, zda platí $a_n \xrightarrow{\varrho_\star} a_0$.
3. Rozhodněte, zda jsou metriky ϱ_2 a $\varrho_\star$ ekvivalentní na X.

Příklad 4.5. **[2 body]**

Mějme dva metrické prostory (X, ϱ_1) a (Y, σ), kde $X = Y = C(\langle -1; 1 \rangle)$ a

$$\varrho_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x, \qquad \sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Dále mějme zobrazení $F : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ definované předpisem $F(f(x)) = k \cdot f(x^3)$.

Určete všechna $k \in \mathbb{R}$ tak, aby F bylo izometrické zobrazení prostoru (X, ϱ_1) na prostor (Y, σ).