Příklad 5.1. **[2 body]**

Mějme metrický prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$, kde $\varrho(x,y) = |x-y|$. Dále mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$\exists\, q \in (0;1)\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ |f'(x)| \leq q.$$

Ukažte, že f má právě jeden pevný bod.

(Nápověda: Užijte větu o střední hodnotě diferenciálního počtu a ověřte všechny předpoklady Banachovy věty o pevném bodu.)

Příklad 5.2. **[2 body]**

Mějme metrický prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$, kde $\varrho(x,y) = |x-y|$. Dále mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := x + \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Ukažte, že platí

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} :\ x \neq y \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < |x-y|.$$

Dále ukažte, že f nemá žádný pevný bod. (Nápověda: Užijte větu o střední hodnotě diferenciálního počtu.)

Příklad 5.3. **[2 body]**

Mějme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$, kde ϱ_2 je euklidovská metrika. Dále mějme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{a} + b, \frac{y}{c} + b\right),$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a, c > 1$.

Užitím Banachovy věty o pevném bodu ukažte, že F má právě jeden pevný bod.
Dále tento pevný bod určete.

Příklad 5.4. **[2 body]**

Mějme metrický prostor (X, ϱ_∞), kde $X = C(\langle 0;1\rangle)$ a $\varrho_\infty(f,g) = \sup\limits_{x \in \langle 0;1\rangle} |f(x) - g(x)|$.

Dále na X definujme operátor T předpisem

$$(T(f))(x) := \int_0^x t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Užitím Banachovy věty o pevném bodu ukažte, že T má právě jeden pevný bod.
Dále tento pevný bod určete.

Příklad 5.5. **[2 body]**

Mějme úplný Baireův metrický prostor $(X, \varrho_{\mathsf{B}})$, kde X je množina všech posloupností přirozených čísel

$$X := \big\{(x_n) :\ x_n \in \mathbb{N} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\big\}$$

a ϱ_{B} je metrika definovaná jako

$$\varrho_{\mathsf{B}}(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x \neq y, \text{ kde } n \in \mathbb{N} \text{ je nejmenší index takový, že } x_n \neq y_n, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Dále na X definujme operátor T předpisem

$$T(x) := (1, x_1, 1, x_2, 1, x_3, 1, x_4, 1, \dots).$$

Užitím Banachovy věty o pevném bodu ukažte, že T má právě jeden pevný bod.
Dále tento pevný bod určete.