Příklad 6.1. **[2 body]**

Mějme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$, kde ϱ_2 je euklidovská metrika.

Rozhodněte o kompaktnosti množin M_1, M_2 a M_3

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}, \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)\right\}, \\ M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \tfrac{1}{x} \ \wedge \ 0 < x \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Příklad 6.2. **[2 body]**

Mějme $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$. Ukažte, že platí: $\ell^{p_1} \subset \ell^\infty$, $\ell^\infty \not\subset \ell^{p_1}$, $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, $\ell^{p_2} \not\subset \ell^{p_1}$.

Příklad 6.3. **[2 body]**

Mějme $p > 0$ a uvažujme dvě množiny integrovatelných funkcí s p-tou mocninou

$$\mathscr{L}^p((0;1)) \quad \text{a} \quad \mathscr{L}^p((1;+\infty)).$$

Dále mějme funkce $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ s reálným parametrem α.

1. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha > 0$ tak, aby $\quad f_\alpha \in \mathscr{L}^p((0;1))$.
2. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha > 0$ tak, aby $\quad f_\alpha \in \mathscr{L}^p((1;+\infty))$.

Příklad 6.4. **[2 body]**

Mějme $0 < p_1 < p_2 < +\infty$.

1. Najděte funkci $f = f(x)$, pro kterou platí $\quad f \in \mathscr{L}^{p_1}((0;1)) \quad \wedge \quad f \notin \mathscr{L}^{p_2}((0;1))$,
2. Najděte funkci $f = f(x)$, pro kterou platí $\quad f \in \mathscr{L}^{p_2}((1;+\infty)) \quad \wedge \quad f \notin \mathscr{L}^{p_1}((1;+\infty))$.

Příklad 6.5. **[2 body]**

Ukažte, že normovaný lineární prostor $(C^1(\langle -1;1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ není úplný. Ke zdůvodnění užijte následující funkční posloupnost

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$