Příklad 7.1. **[2 body]**

Mějme unitární prostor $(X, (\cdot,\cdot))$ nad reálným tělesem $\mathbb{R}$.

Ukažte, že pro libovolné dva prvky $x, y \in X$ platí

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \perp y$$

Příklad 7.2. **[2 body]**

Mějme unitární prostor $(X, (\cdot,\cdot))$ nad komplexním tělesem $\mathbb{C}$.

Ukažte, že pro libovolné nenulové $x \in X$ a pro libovolné $y \in X$ platí

$$|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \alpha \in \mathbb{C}: \; y = \alpha \cdot x$$

(V Cauchyově – Schwarzově – Buňakovského nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když x a y jsou lineárně závislé.)

Příklad 7.3. **[2 body]**

Mějme unitární prostor $(X, (\cdot,\cdot))$ nad komplexním tělesem $\mathbb{C}$.

Ukažte, že pro dva libovolné nenulové prvky $x, y \in X$ platí

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, c \in \mathbb{R}^+: \; y = c \cdot x$$

(Pro (indukovanou) normu nastává pro dva nenulové prvky v trojúhelníkové nerovnosti rovnost právě tehdy, když jeden prvek je kladným násobkem druhého.)

(Nápověda: Použijte výsledku z předchozího příkladu 7.2.)

Příklad 7.4. **[2 body]**

Mějme unitární prostor $(X, (\cdot,\cdot))$ nad komplexním tělesem $\mathbb{C}$.

Ukažte, že pro libovolné dva prvky $x, y \in X$ platí

$$x \perp y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}: \; \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|\,.$$

Příklad 7.5. **[2 body]**

Mějme unitární prostor $(X, (\cdot,\cdot))$. Ukažte, že pro libovolný prvek $x \in X$ platí

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\,(x,y)\,|.$$

(Nápověda: Použijte Cauchyovu – Schwarzovu – Buňakovského nerovnost.)