Příklad 8.1. **[2 body]**

1. Ukažte, že na Banachově prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nelze zavést skalární součin, který by indukoval normu $\|\cdot\|_\infty$.
2. Ukažte, že na Banachově prostoru $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ pro $1 \leq p \neq 2$ nelze zavést skalární součin, který by indukoval normu $\|\cdot\|_p$.

(Nápověda: Použijte rovnoběžníkové pravidlo.)

Příklad 8.2. **[2 body]**

Ukažte, že na Banachově prostoru $(C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ nelze zavést skalární součin, který by indukoval normu $\|\cdot\|_\infty$.

(Nápověda: Použijte rovnoběžníkové pravidlo.)

Příklad 8.3. **[2 body]**

Mějme lineární prostor $X = \left\{ \, f \in C^1(\langle 0;1\rangle) : \; f(0) = 0 \, \right\}$ nad tělesem $\mathbb{C}$.

Pro každé $f, g \in X$ definujme

$$(f,g) := \int_0^1 f'(x) \cdot \overline{g'(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin na X.

Příklad 8.4. **[2 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$, kde $H = L^2((0;1))$. Dále mějme posloupnost $(f_n) \subset H$, kde

$$f_n(x) := n^2 x \, \mathrm{e}^{-nx},$$

a označme $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x), \quad x \in (0;1)$.

Ukažte, že f není limitou posloupnosti (f_n) v Hilbertově prostoru $(H, (\cdot,\cdot))$.

Příklad 8.5. **[4 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$, kde $H = L^2((-1;1))$, a množinu $\{1, x, x^2\} \subset H$.

1. Pomocí Gramova–Schmidtova ortonormalizačního procesu najděte prvky ortonormální množiny $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$ tak, aby platilo
$$\mathrm{Lin}\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\} = \mathrm{Lin}\{1, x, x^2\}.$$
2. Pro prvek $f \in H$, kde $f(x) = \mathrm{e}^x$, najděte jeho ortogonální průmět $\tilde{f} \in \mathrm{Lin}\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$:
$$\left(\, f - \tilde{f} \, \right) \;\perp\; \mathrm{Lin}\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}.$$
3. Do jednoho obrázku vykreslete grafy funkcí f a $\tilde{f}$, a to na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ (užijte např. systém `Matlab` nebo `Mathematica`).