

Příklad 9.1.**[2 body]**

Mějme operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ s normou $\|T\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y$. Ukažte, že platí

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Příklad 9.2.**[2 body]**

Mějme NLP $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ a operátor $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ definovaný předpisem

$$Tx := (x_n \cdot \operatorname{arctg} n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.

Příklad 9.3.**[2 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(\ell^2, (\cdot, \cdot))$ a operátor $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definovaný předpisem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) := (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots).$$

1. Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.
2. Určete adjungovaný operátor T^* .

Příklad 9.4.**[2 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(\ell^2, (\cdot, \cdot))$ a operátor $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definovaný předpisem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) := \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_5+x_6}{2}, \dots \right).$$

1. Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.
2. Určete adjungovaný operátor T^* .

(Nápověda: Ověřte platnost nerovnosti $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$.)

Příklad 9.5.**[2 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(L^2((0;1)), (\cdot, \cdot))$ a operátor $T : L^2((0;1)) \rightarrow L^2((0;1))$ definovaný předpisem

$$(Tf)(x) := x \int_0^1 f(t) dt.$$

1. Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.
2. Určete adjungovaný operátor T^* .

(Nápověda: Užijte Hölderovu nerovnost a Fubiniovu větu.)