Příklad 10.1. **[2 body]**

Mějme Banachův prostor $(C(\langle -1;1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ a operátor $T : C(\langle -1;1\rangle) \to C(\langle -1;1\rangle)$ definovaný předpisem

$$(Tf)(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ukažte, že T je spojitý a určete $\|T\|$.

Příklad 10.2. **[2 body]**

Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_\infty)$, kde $X = \mathbb{R}^2$, a jeho lineární podprostor $M := \big\{(x,y) \in X : \; x = y\big\}$.
Dále definujme funkcionál $g : M \to \mathbb{R}$ pomocí předpisu $g(x,y) := x$.

1. Ukažte, že $g \in M^*$.
2. Najděte všechna rozšíření $f \in X^*$ spojitého lineárního funkcionálu g na X.

   (Existence alespoň jednoho takového rozšíření je zaručena Hahnovou – Banachovou větou.)

Příklad 10.3. **[2 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(L^2(\langle 0;1\rangle), (\cdot,\cdot))$ a operátor $T : \mathscr{D}(T) \to L^2(\langle 0;1\rangle)$ definovaný předpisem

$$(Tf)(x) := -f''(x),$$
$$\mathscr{D}(T) := \big\{f \in W^{2,2}(\langle 0;1\rangle) : \; f(0) = 0, \; f'(0) = f'(1)\big\}.$$

Určete adjungovaný operátor T^*.

($W^{2,2}(\langle 0;1\rangle)$ je Sobolevův prostor a představuje množinu všech funkcí f, které patří do $C^1(\langle 0;1\rangle)$ a pro které f' je absolutně spojitá na $\langle 0;1\rangle$ a $f'' \in L^2(\langle 0;1\rangle)$.)

Příklad 10.4. **[4 body]**

Mějme Hilbertův prostor $(L^2(\langle 0;1\rangle), (\cdot,\cdot))$ a operátor $T : \mathscr{D}(T) \to L^2(\langle 0;1\rangle)$ definovaný předpisem

$$(Tf)(x) := -f''(x),$$
$$\mathscr{D}(T) := \big\{f \in W^{2,2}(\langle 0;1\rangle) : \; f(0) = f'(1) = 0\big\}.$$

1. Rozhodněte, zda T je samoadjungovaný operátor.
2. Určete všechna vlastní čísla a vlastní funkce operátoru T.