KMA/UFA

Úvod do funkcionální analýzy

pracovní verze textu

poslední změna: 29.10.2020

připomínky a komentáře zasílejte na pnecesal@kma.zcu.cz

Kapitola 1

Metrické prostory

Definice 1.1 Mějme libovolnou neprázdnou množinu X. Zobrazení $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+ := \langle 0; +\infty)$ nazveme metrikou na X, pokud platí

(M1) $\forall\, x, y \in X: \quad \varrho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$ (axiom totožnosti);

(M2) $\forall\, x, y \in X: \quad \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (axiom symetrie);

(M3) $\forall\, x, y, z \in X: \quad \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici (X, ϱ) pak nazýváme metrickým prostorem.

Příklady:

1. $X = \mathbb{R}$, $\quad \varrho(x,y) = |x-y|$
2. $X = \mathbb{C}$, $\quad \varrho(x,y) = |x-y|$
3. $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad \varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ (euklidovská metrika)
4. $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad \varrho_1(x,y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$ (součtová metrika)
5. $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad \varrho_\infty(x,y) := \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |x_k - y_k|$ (maximová metrika)
6. $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $\quad \varrho_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
7. X je libovolná neprázdná množina,

$$\tau(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y, \\ 1 & \text{pro } x \neq y, \end{cases}$$ triviální metrika (diskrétní metrika),

(X, τ) je diskrétní metrický prostor

Lemma 1.1 Mějme $a, b > 0$, $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q je konjugovaný exponent k p). Potom platí

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Věta 1.1 (Hölderova nerovnost)
Mějme $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Potom platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Věta 1.2 (Minkowského nerovnost)
Mějme $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$.
Potom platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 1.2 Mějme metrický prostor (X, ϱ), bod $x_0 \in X$ a reálné číslo $r > 0$. Označme

$$K(x_0; r) := \{x \in X : \ \varrho(x, x_0) < r\} \qquad \text{(otevřená koule)},$$

$$\tilde{K}(x_0; r) := \{x \in X : \ \varrho(x, x_0) \leq r\} \qquad \text{(uzavřená koule)},$$

$$S(x_0; r) := \{x \in X : \ \varrho(x, x_0) = r\} \qquad \text{(sféra)}.$$

Poznámka $S(x_0; r) = \tilde{K}(x_0; r) \setminus K(x_0; r)$

Příklad: $X = \mathbb{R}^2$, načrtněte $S(x_0; r)$ pro $x_0 = (0, 0)$ a $r = 1$ v následujících metrikách: ϱ_2, ϱ_1, ϱ_8 a ϱ_∞

Definice 1.3 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$. Řekneme, že

1. množina M je otevřená, pokud $\quad \forall\, x_0 \in M \ \exists\, r > 0 : \ K(x_0; r) \subset M$,
2. množina M je uzavřená, pokud doplněk $\quad M^{\mathsf{c}} := X \setminus M \quad$ je otevřená množina.

Poznámka

1. Prázdná množina $\emptyset$ je považována za otevřenou (úmluva).
2. Množina X je tedy otevřená a zároveň uzavřená.
3. A prázdná množina $\emptyset$ je tedy také uzavřená.
4. M je otevřená právě tehdy, když M^{c} je uzavřená (viz $X \setminus M^{\mathsf{c}} = X \setminus (X \setminus M) = M$).

Příklad: $X = (1;3\rangle \cup (4;+\infty)$, $\varrho(x,y) = |x-y|$, $M_1 = (1;3\rangle$, $M_2 = (1;2\rangle$,
rozhodněte, zda jsou množiny M_1 a M_2 otevřené a zda jsou uzavřené

Lemma 1.2 Množina $K(x_0;r)$ je otevřená a množina $\tilde{K}(x_0;r)$ je uzavřená.

Definice 1.4 Mějme metrický prostor (X,ϱ) a množinu $M \subset X$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je

1. vnitřním bodem množiny M, pokud $\quad \exists\, r > 0 : \ K(x_0;r) \subset M$,
2. vnějším bodem množiny M, pokud $\quad \exists\, r > 0 : \ K(x_0;r) \cap M = \emptyset$,
3. hraničním bodem množiny M, pokud $\quad \forall\, r > 0 : \ K(x_0;r) \not\subset M \ \wedge \ K(x_0;r) \cap M \neq \emptyset$.

Dále označme

$$\operatorname{Int} M := \{x \in X : \ x \text{ je vnitřní bod } M\} \qquad (\text{ vnitřek množiny } M \text{ }),$$

$$\operatorname{Ext} M := \{x \in X : \ x \text{ je vnější bod } M\} \qquad (\text{ vnějšek množiny } M \text{ }),$$

$$\partial\, M := \{x \in X : \ x \text{ je hraniční bod } M\} \qquad (\text{ hranice množiny } M \text{ }),$$

$$\overline{M} := M \cup \partial\, M \qquad (\text{ uzávěr množiny } M \text{ }).$$

Poznámka

1. $X = \operatorname{Int} M \cup \partial\, M \cup \operatorname{Ext} M$
2. $\operatorname{Int} M \subset M \subset \overline{M}$
3. $\operatorname{Int} M = \operatorname{Ext} M^{\mathsf{c}}$, $\operatorname{Ext} M = \operatorname{Int} M^{\mathsf{c}}$, $\partial\, M = \partial\, M^{\mathsf{c}}$
4. Uzávěr otevřené koule $\overline{K(x_0;r)}$ nemusí být uzavřená koule $\tilde{K}(x_0;r)$.

Lemma 1.3 Mějme metrický prostor (X,ϱ) a množinu $M \subset X$.

1. Množina M je otevřená právě tehdy, když neobsahuje žádný svůj hraniční bod (tj. $\partial\, M \cap M = \emptyset$).
2. Množina M je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body (tj. $\partial\, M \subset M$).

Definice 1.5 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je

1. izolovaným bodem množiny M, pokud $\exists\, r > 0 : \ K(x_0; r) \cap M = \{x_0\}$,
2. hromadným bodem množiny M, pokud $\forall\, r > 0 : \ (K(x_0; r) \setminus \{x_0\}) \cap M \neq \emptyset$.

Lemma 1.4 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Každý bod $x_0 \in M^{\mathrm{c}} = X \setminus M$ je hromadným bodem M právě tehdy, když je hraničním bodem M.

Věta 1.3 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Množina M je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body.

1.2 Konvergentní a cauchyovské posloupnosti

Definice 1.6 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ v tomto prostoru (jakožto zobrazení z $\mathbb{N}$ do X).

1. Řekneme, že posloupnost (x_n) je konvergentní v prostoru (X, ϱ), pokud
$$\exists\, x \in X : \lim_{n \to +\infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$
Prvek $x \in X$ pak nazýváme limitou posloupnosti (x_n) a píšeme
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \quad \text{v } (X, \varrho) \qquad \text{nebo} \qquad x_n \xrightarrow{\varrho} x.$$
2. Řekneme, že posloupnost (x_n) je divergentní v prostoru (X, ϱ), pokud není v tomto prostoru konvergentní.

Příklad: $X = \mathbb{R}$, $M = (0; 1)$, $\varrho(x, y) = |x - y|$, $x_n = \frac{1}{n}$
rozhodněte, zda je (x_n) konvergentní v (X, ϱ), zda je konvergentní v (M, ϱ) a zda je konvergentní v (X, τ)

Lemma 1.5 Mějme posloupnosti bodů (x_n) a (y_n) v metrickém prostoru (X, ϱ). Potom platí:

1. Existuje nejvýše jedna limita posloupnosti (x_n) v (X, ϱ).
2. Jestliže platí $\big(\, \exists\, x \in X \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n = x \,\big)$, potom $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.
3. Jestliže $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ a platí $\big(\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \;\Rightarrow\; y_n = x_n \,\big)$, potom $y_n \xrightarrow{\varrho} x$.
4. Jestliže $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ a (y_n) je vybraná podposloupnost z posloupnosti (x_n), potom $y_n \xrightarrow{\varrho} x$.

Definice 1.7 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je <u>limitním bodem</u> množiny M, pokud $\quad \exists\, (x_n) \subset M : \; x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$.

Lemma 1.6 Mějme metrický prostor (X, ϱ), množinu $M \subset X$ a bod $x_0 \in X$.

1. Jestliže x_0 je hromadným bodem M, potom x_0 je limitním bodem M.
2. Každý bod $x_0 \in M^{\mathsf{c}} = X \setminus M$ je hromadným bodem M právě tehdy, když je limitním bodem M.

Lemma 1.7 Mějme metrický prostor (X, ϱ), množinu $M \subset X$ a bod $x_0 \in X$.

Bod x_0 leží v uzávěru $\overline{M}$ právě tehdy, když je limitním bodem M.

Věta 1.4 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Množina M je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své limitní body.

Poznámka Množina M je uzavřená právě tehdy, když platí implikace

$$\Big(\, \forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \in M \,\Big) \quad \wedge \quad \Big(\, x_n \xrightarrow{\varrho} x_0 \,\Big) \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in M.$$

Příklad: $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$, $M = \langle 1; 3 \rangle$; ukažte, že M je uzavřená v (X, ϱ)

Příklad: $X = l^\infty$ je množina všech omezených posloupností, $\varrho(x, y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$,
M je množina všech posloupností, které mají limitu rovnu nule; ukažte, že M je uzavřená v (X, ϱ)

Definice 1.8 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ v tomto prostoru.
Řekneme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská v prostoru (X, ϱ), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, \forall m \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \; \wedge \; m > n_0 \; \Rightarrow \; \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Lemma 1.8 Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je v něm i cauchyovská.

Příklad: $X = (0; 2)$, $\varrho(x, y) = |x - y|$, $x_n = \frac{1}{n}$;
ukažte, že (x_n) je cauchyovská v (X, ϱ), ale není konvergetní v (X, ϱ)

Příklad: $X = \mathbb{Q}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
ukažte, že (x_n) je cauchyovská v (X, ϱ), ale není konvergetní v (X, ϱ)

Definice 1.9 Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta 1.5 Mějme *úplný* metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.
Množina M je uzavřená právě tehdy, když je metrický prostor (M, ϱ) úplný.

Definice 1.10 Mějme metrické prostory (X, ϱ) a (X, σ).
Řekneme, že ϱ a σ jsou ekvivalentní metriky na X, pokud

$$\exists \alpha, \beta > 0 \, \forall x, y \in X : \; \alpha \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \beta \cdot \varrho(x, y).$$

Příklad: $X = \mathbb{R}^2$, ukažte, že metriky ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞ jsou ekvivalentní na X

Lemma 1.9 Mějme metrické prostory (X, ϱ) a (X, σ) tak, že ϱ a σ jsou ekvivalentní metriky na X. Potom pro každou posloupnost bodů (x_n) v X a prvek $x \in X$ platí

$$x_n \xrightarrow{\varrho} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{\sigma} x.$$

Příklad: $X = C(\langle 0; 1 \rangle)$, ukažte, že metriky ρ_1 a ρ_∞ nejsou ekvivalentní na X

Poznámka Mějme ekvivalentní metriky ϱ a σ na X a $M \subset X$. Potom platí

$$M \text{ je uzavřená v } (X, \varrho) \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ je uzavřená v } (X, \sigma).$$

1.3 Zúplnění metrických prostorů

Definice 1.11 Mějme dva metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ).

Zobrazení $F : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ se nazývá izometrické, pokud platí

$$\forall\, x, y \in X: \ \sigma(F(x), F(y)) = \varrho(x, y).$$

Prostory (X, ϱ) a (Y, σ) nazveme izometrické, pokud existuje izometrické zobrazení z X na Y.

Příklad: $X = Y = \mathbb{R}^2$, $\rho(x, y) = \sigma(x, y) = \rho_2(x, y)$ – euklidovská metrika, F – shodné zobrazení v rovině (posunutí, otočení, středová souměrnost, osová souměrnost), F je izometrické zobrazení

Příklad: $X = Y = C(\langle -1; 1\rangle)$, $\rho(f, g) = \sigma(f, g) = \rho_1(f, g)$, $F : X \to Y$, $F(f(x)) = f(-x)$, ukažte, že F je izometrické zobrazení

Poznámka Izometrické zobrazení $F : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ je vždy prosté.

Definice 1.12 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Řekneme, že množina M je hustá v (X, ϱ), jestliže $\overline{M} = X$.

Příklad: $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $M = \mathbb{Q}$, množina M je hustá v (X, ϱ)

Příklad: $X = C(\langle 0; 1\rangle)$, M je množina všech polynomů na intervalu $\langle 0; 1\rangle$, množina M je hustá v (X, ϱ_∞)

Lemma 1.10 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

1. Množina M je hustá v (X, ϱ) právě tehdy, když každý bod $x_0 \in X$ je limitním bodem množiny M.
2. Množina M je hustá v (X, ϱ) právě tehdy, když platí

$$\forall\, x_0 \in X \ \forall\, r > 0 \ \exists\, y \in M: \ \varrho(x_0, y) < r.$$

Definice 1.13 Mějme metrický prostor (X, ϱ). Metrický prostor (Y, σ) se nazývá úplný obal (zúplnění) metrického prostoru (X, ϱ), pokud platí:

1. prostor (Y, σ) je úplný,
2. prostor (X, ϱ) je izometrický s podprostorem (Y_0, σ) prostoru (Y, σ),
3. množina Y_0 je hustá v (Y, σ).

Věta 1.6 Ke každému metrickému prostoru existuje jeho úplný obal.

Věta 1.7 Všechny úplné obaly jsou k danému metrickému prostoru izometrické.

1.4 Kompaktní metrické prostory a spojitá zobrazení

Definice 1.14 Mějme metrický prostor (X, ϱ).

1. Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá kompaktní, pokud z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost.
2. Množina $M \subset X$ se nazývá kompaktní, pokud (M, ϱ) je kompaktní prostor (tj. z každé posloupnosti bodů množiny M lze vybrat podposloupnost, která má limitu v M).

Příklad: $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, prostor (X, ϱ) není kompaktní

1. množina $M = \langle 0; 2\rangle$ je kompaktní, množina M je omezená a uzavřená,
2. množina $M = (0; 2)$ není kompaktní, množina M je omezená, ale není uzavřená,
3. množina $M = \mathbb{N}$ není kompaktní, množina M je uzavřená, ale není omezená.

Definice 1.15 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a množinu $M \subset X$.

Řekneme, že množina M je omezená, pokud je podmnožinou otevřené koule s konečným poloměrem.

Věta 1.8 Mějme metrický prostor (X, ϱ) a $M \subset X$.

Je-li množina M kompaktní, potom je omezená a uzavřená.

Věta 1.9 Mějme metrický prostor $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$, $n \in \mathbb{N}$, euklidovskou metrikou ϱ_2 a $M \subset \mathbb{R}^n$.

Množina M kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Příklad: metrický prostor $(l^\infty, \varrho_\infty)$, $M = \left\{x^{(k)} :\ k \in \mathbb{N}\right\}$, kde $x^{(k)} := \left(x_n^{(k)}\right)_{n=1}^{+\infty}$, $x_n^{(k)} := 1$ pro $n = k$ a $x_n^{(k)} := 0$ pro $n \neq k$, množina $M \subset l^\infty$ je omezená a uzavřená, ale není kompaktní

Poznámka Uzavřená koule $\tilde{K}(x_0; r)$ s $r > 0$ není kompaktní v prostoru $(l^\infty, \varrho_\infty)$.

Věta 1.10 Mějme *kompaktní* metrický prostor (X, ϱ) a $M \subset X$.

Množina M kompaktní právě tehdy, když je uzavřená.

Věta 1.11 Každý kompaktní metrický prostor (X, ϱ) je úplný.

Definice 1.16 Mějme dva metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ).

Řekneme, že zobrazení $F : X \to Y$ je <u>spojité v bodě</u> x_0, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \ \varrho(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

Řekneme, že F je <u>spojité</u> na X, pokud je spojité v každém bodě $x_0 \in X$.

Poznámka

1. F je spojité v bodě x_0 právě tehdy, když $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in K(x_0; \delta) : \ F(x) \in K(F(x_0); \varepsilon)$
2. Izometrické zobrazení $F : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ je spojité.

Věta 1.12 Mějme metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ), zobrazení $F : X \to Y$ a bod $x_0 \in X$.

Potom F je spojité v bodě x_0 právě tehdy, když pro každou posloupnost (x_n) prvků z X platí

$$x_n \xrightarrow{\varrho} x_0 \quad \Longrightarrow \quad F(x_n) \xrightarrow{\sigma} F(x_0).$$

Věta 1.13 Mějme metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ), *spojité* zobrazení $F : X \to Y$ a $M \subset X$.

Je-li množina M kompaktní v (X, ϱ), potom je množina $F(M)$ kompaktní v (Y, σ).

1.5 Banachův princip pevného bodu

Definice 1.17 Mějme metrický prostor (X, ϱ). Řekneme, že operátor $T : X \to X$ je kontraktivní na X, pokud platí

$$\exists\, q \in \langle 0, 1) \ \forall\, x, y \in X : \ \varrho(T(x), T(y)) \leq q \cdot \varrho(x, y).$$

Věta 1.14 (Banachova věta o pevném bodě)

Mějme metrický prostor (X, ϱ). Jestliže je prostor (X, ϱ) *úplný* a $T : X \to X$ je *kontraktivní* operátor, potom

$$\exists!\, x \in X : \ T(x) = x.$$

Věta 1.15 Mějme obdélník $D = \langle x_0 - a; x_0 + a\rangle \times \langle y_0 - b; y_0 + b\rangle$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a $a, b > 0$.
Dále mějme funkci $f = f(x, y)$, která je spojitá na D a má na D také spojitou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Potom existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

na intervalu $(x_0 - h; x_0 + h)$, kde

$$h := \min\left\{a, \tfrac{b}{M}, \tfrac{q}{L}\right\}, \quad q \in (0; 1), \quad M := \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|, \quad L := \max_{(x,y)\in D} \left|\tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|.$$