KMA/UFA

Úvod do funkcionální analýzy

---

pracovní verze textu

poslední změna: 8.11.2020

připomínky a komentáře zasílejte na pnecesal@kma.zcu.cz

Kapitola 2

Normované lineární prostory, Banachovy prostory

Definice 2.1 Mějme lineární (vektorový) prostor X nad tělesem $\mathbb{T}$ ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+ := \langle 0; +\infty)$ nazveme normou na X, pokud platí

(N1) $\forall\, x \in X : \quad \|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \mathtt{0}$ (axiom totožnosti);

(N2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{T}\; \forall\, x \in X : \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (pozitivní homogenita);

(N3) $\forall\, x, y \in X : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme normovaným lineárním prostorem (NLP).

Poznámka

1. Pokud uvažujeme těleso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, potom hovoříme o reálném NLP. O komplexním NLP hovoříme v případě volby $\mathbb{T} = \mathbb{C}$. V dalším se však budeme věnovat převážně reálným NLP.

2. Z (N2) a (N3) vyplývá, že $\forall\, x \in X : \; \|x\| \geq 0$.

3. Mějme NLP $(X, \|\cdot\|)$ a definujme zobrazení $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \,.$$

Potom ϱ je metrika (indukovaná normou) na X a (X, ϱ) je metrický prostor.

Příklad: $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$, (X, ϱ) je metrický prostor, neexistuje však žádná norma $\|\cdot\|$ na X, která by indukovala tuto metriku

Definice 2.2 Normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachův prostor, pokud (X, ϱ) je úplný metrický prostor s metrikou indukovanou normou ($\varrho(x, y) = \|x - y\|$).

Lemma 2.1 Mějme $\texttt{NLP}$ $(X, \|\cdot\|)$. Norma prvku je spojité zobrazení z X do $\mathbb{R}$.

Definice 2.3 Mějme normované lineární prostory $(X, \|\cdot\|_{\mathtt{A}})$ a $(X, \|\cdot\|_{\mathtt{B}})$.
Řekneme, že $\|\cdot\|_{\mathtt{A}}$ a $\|\cdot\|_{\mathtt{B}}$ jsou ekvivalentní normy na X, pokud

$$\exists\, \alpha, \beta > 0\ \forall\, x \in X:\ \ \alpha \cdot \|x\|_{\mathtt{A}} \le \|x\|_{\mathtt{B}} \le \beta \cdot \|x\|_{\mathtt{A}}\,.$$

Příklad: $X = C^1(\langle 0;\pi\rangle)$, $\|f\|_{\mathtt{A}} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $\|f\|_{\mathtt{B}} = \|f\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\mathtt{A}}$ a $\|\cdot\|_{\mathtt{B}}$ nejsou ekvivalentní na X

Věta 2.1 Mějme normované lineární prostory $(X, \|\cdot\|_{\mathtt{A}})$ a $(X, \|\cdot\|_{\mathtt{B}})$. Normy $\|\cdot\|_{\mathtt{A}}$ a $\|\cdot\|_{\mathtt{B}}$ jsou ekvivalentní na X právě tehdy, když pro každou posloupnost bodů (x_n) v X a prvek $x \in X$ platí

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathtt{A}}} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathtt{B}}} x.$$

Definice 2.4 Mějme normované lineární prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
Řekneme, že zobrazení $T: X \to Y$ je lineární, pokud platí

$$\forall\, x, y \in X\ \forall\, \alpha \in \mathbb{T}:\ \ T(x+y) = T(x) + T(y),\ T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

a píšeme $Tx = T(x)$.

Příklad: Následující zobrazení $T: X \to Y$ jsou lineární:

1. $T: X \to X, \quad Tx := x$ (identické zobrazení);
2. $T: C^1(\langle 0;1\rangle) \to C(\langle 0;1\rangle), \quad Tf := f'$ (diferenciální operátor);
3. $T: C(\langle 0;1\rangle) \to C^1(\langle 0;1\rangle), \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;
4. $T: C(\langle 0;1\rangle) \to C(\langle 0;1\rangle), \quad (Tf)(x) := \int_0^1 K(x,t)\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ (integrální operátor),
   kde jádro K je dáno předpisem
   $$K(x,t) := \begin{cases} x & \text{pro } 0 \le x \le t, \\ t & \text{pro } t < x \le 1; \end{cases}$$
5. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx := A \cdot x$, kde $A = [a_{i,j}]$ je reálná matice řádu n a $x = [x_{i,1}]$ je sloupec o n-složkách.

Definice 2.5 Mějme normované lineární prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Řekneme, že prostory $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou

1. izometricky izomorfní [a], pokud existuje prosté lineární zobrazení $T : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ takové, že platí

$$\forall\, x \in X : \; \|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

   (T je tzv. izometrický izomorfismus X na Y);

2. izomorfní [b], pokud existuje prosté lineární zobrazení $T : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ takové, že platí

$$\exists\, \alpha, \beta > 0 \;\forall\, x \in X : \; \alpha \cdot \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq \beta \cdot \|x\|_X$$

   (T je tzv. izomorfismus X na Y).

[a] též označovány jako lineárně izometrické či jen izometrické

[b] též označovány jako lineárně homeomorfní nebo jen homeomorfní

Poznámka

1. Mějme normované lineární prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$, které jsou izometricky izomorfní.

   Potom pro metriky ϱ_X a ϱ_Y indukované normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, tj.

$$\varrho_X(x, y) = \|x - y\|_X\,, \quad \varrho_Y(x, y) = \|x - y\|_Y\,,$$

   máme také metrické prostory (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y), které jsou izometrické.

2. Pokud jsou prostory $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ izometricky izomorfní, potom jsou i izomorfní.

3. Vztah (izometrického) izomorfismu je vztah ekvivalence.

Příklad: Prostory $(L^2((-\pi;\pi)), \|\cdot\|_2)$ a $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ jsou izometricky izomorfní.

Věta 2.2 Mějme NLP $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, které jsou izomorfní.

Prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je Banachův právě tehdy, když prostor $(Y, \|\cdot\|_Y)$ je Banachův.

Věta 2.3 Mějme NLP $(X, \|\cdot\|)$ s konečnou dimenzí $\dim X = n \in \mathbb{N}$.

Potom $(X, \|\cdot\|)$ je izomorfní s $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ a všechny normy na X jsou ekvivalentní.

Poznámka Každý NLP konečné dimenze je Banachův prostor.

Věta 2.4 Mějme NLP $(X, \|\cdot\|)$ a jednotkovou sféru $S(0;1) \subset X$.

Jednotková sféra $S(0;1)$ je kompaktní právě tehdy, když X má konečnou dimenzi.

2.1 Banachovy prostory posloupností

1. Prostor ℓ^∞ všech omezených posloupností je Banachův prostor s normou $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

   $$\ell^\infty := \Big\{(x_n) : \text{ posloupnost } (x_n) \text{ je omezená } \Big\}$$

2. Prostor c všech konvergentních posloupností je Banachův prostor s normou $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

   $$c := \Big\{(x_n) : \text{ existuje konečná } \lim_{n\to+\infty} x_n\Big\}$$

3. Prostor c_0 všech posloupností s nulovou limitou je Banachův prostor s normou $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

   $$c_0 := \Big\{(x_n) : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\Big\}$$

4. Prostor ℓ^p $(1 \le p < +\infty)$ všech ℓ^p–posloupností je Banachův prostor s normou $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

   $$\ell^p := \Big\{(x_n) : \text{ řada } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \text{ je konvergentní } \Big\}$$

Poznámka

1. Pro exponenty $1 < p_1 < 2 < p_2 < +\infty$ platí

   $$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^2 \subset \ell^{p_2} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty,$$

   kde c_{00} je množina všech posloupností, které mají jen konečně mnoho členů nenulových.

2. Množiny c a c_0 jsou uzavřené v prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

3. Množina c_{00} není uzavřená v prostoru $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ a tedy ani v prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
   Uzávěr množiny c_{00} v prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ je c_0, tedy $\overline{c_{00}} = c_0 \neq c_{00}$ a c_{00} je hustá v c_0.

4. Množina c_{00} není uzavřená v prostoru $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ pro $1 \le p < +\infty$.
   Uzávěr množiny c_{00} v prostoru $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ je ℓ_p, tedy c_{00} je hustá v ℓ_p.

5. Následující prostory nejsou úplné: $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$, $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ pro $1 \le p < +\infty$.

2.2 Banachovy prostory funkcí

Mějme $-\infty < a < b < +\infty$.

1. Prostor $B(\langle a;b\rangle)$ všech omezených funkcí na $\langle a;b\rangle$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} |f(x)|$.
$$B(\langle a;b\rangle) := \Big\{ f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R} :\ f \text{ je omezená na } \langle a;b\rangle \Big\}$$

2. Prostor $C(\langle a;b\rangle)$ všech spojitých funkcí na $\langle a;b\rangle$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} |f(x)|$.
$$C(\langle a;b\rangle) := \Big\{ f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R} :\ f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle \Big\}$$

3. Prostor $BC((a;b))$ všech omezených a spojitých funkcí na $(a;b)$ je Banachův prostor s $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in(a;b)} |f(x)|$.
$$BC((a;b)) := \Big\{ f : (a;b) \to \mathbb{R} :\ f \text{ je omezená a spojitá na } (a;b) \Big\}$$

4. Prostor $UC(\langle a;b\rangle)$ všech stejnoměrně spojitých funkcí na intervalu $\langle a;b\rangle$
$$UC(\langle a;b\rangle) := \Big\{ f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R} : \forall\,\varepsilon > 0\, \exists\,\delta > 0\, \forall x, y \in \langle a;b\rangle : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \Big\}$$
je Banachův prostor s normou $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} |f(x)|$.

5. Prostor $\mathrm{Lip}(\langle a;b\rangle)$ všech lipschitzovsky spojitých funkcí na intervalu $\langle a;b\rangle$
$$\mathrm{Lip}(\langle a;b\rangle) := \Big\{ f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R} :\ \exists\, L > 0\ \forall\, x, y \in \langle a;b\rangle : |f(x) - f(y)| \le L|x-y| \Big\}$$
je Banachův prostor s normou $\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \|f\|_\infty + \sup\limits_{\substack{x,y\in\langle a;b\rangle \\ x\neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.

6. Prostor $C^1(\langle a;b\rangle)$ všech spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu $\langle a;b\rangle$
$$C^1(\langle a;b\rangle) := \Big\{ f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R} :\ f \text{ a } f' \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle \Big\}$$
je Banachův prostor s normou $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Poznámka

1. Pro $-\infty < a < b < +\infty$ platí
$$C^\infty(\langle a;b\rangle) \subset C^1(\langle a;b\rangle) \subset \mathrm{Lip}(\langle a;b\rangle) \subset UC(\langle a;b\rangle) \subset C(\langle a;b\rangle) \subset B(\langle a;b\rangle),$$
kde $C^\infty(\langle a;b\rangle)$ je množina všech nekonečně hladkých funkcí na $\langle a;b\rangle$.

2. Prostory $(\mathrm{Lip}(\langle a;b\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ a $(C^1(\langle a;b\rangle), \|\cdot\|_\infty)$ nejsou úplné.

Mějme $-\infty \le a < b \le +\infty$.

1. Prostor $\mathscr{L}^p((a;b))$ $(1 \le p < +\infty)$ je množina všech integrovatelných funkcí s p-tou mocninou

$$\mathscr{L}^p((a;b)) := \left\{ f : (a;b) \to \mathbb{R} : \text{ integrál } \int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \text{ je konečný } \right\}.$$

Prostor $L^p((a;b))$ $(1 \le p < +\infty)$ je definován jako faktorový prostor $\mathscr{L}^p((a;b))\big|\mathscr{N}_0((a;b))$,

kde $\mathscr{N}_0((a;b))$ je množina všech měřitelných funkcí, které jsou na intervalu $(a;b)$ skoro všude nulové.

Prostor $L^p((a;b))$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$.

2. Prostor $\mathscr{L}^\infty((a;b))$ je množina všech funkcí omezených skoro všude v (a,b)

$$\mathscr{L}^\infty((a;b)) := \left\{ f : (a;b) \to \mathbb{R} : \ f \text{ je omezená skoro všude v } (a;b) \right\}.$$

Prostor $L^\infty((a;b))$ je definován jako faktorový prostor $\mathscr{L}^\infty((a;b))\big|\mathscr{N}_0((a;b))$.

Prostor $L^\infty((a;b))$ je Banachův prostor s normou

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a;b)} |f(x)| := \inf_{\mu(M)=0} \sup_{x \in (a;b) \setminus M} |f(x)| = \inf \big\{ c > 0 : \mu\big(\{ x \in (a;b) : |f(x)| \ge c \} \big) = 0 \big\}.$$

3. Prostor $W^{k,p}((a;b))$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \le p < +\infty)$ je definován jako

$$W^{k,p}((a;b)) := \left\{ f \in L^p((a;b)) : \text{ slabá derivace } f^{(j)} \in L^p((a;b)) \text{ pro } j = 1, \dots, k \right\}.$$

Prostor $W^{k,p}((a;b))$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{k,p} := \|f\|_p + \left\|f^{(1)}\right\|_p + \cdots + \left\|f^{(k)}\right\|_p$.

Poznámka Prostory L^p a L^∞ jsou tzv. Lebesgueovy prostory, prostory $W^{k,p}$ jsou tzv. Sobolevovy prostory.

Poznámka V následujících bodech uvažujeme $-\infty < a < b < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ a $1 \le p < +\infty$:

1. Pro exponenty $1 < p_1 < 2 < p_2 < +\infty$ platí

$$BC((a;b)) \subset L^\infty((a;b)) \subset L^{p_2}((a;b)) \subset L^2((a;b)) \subset L^{p_1}((a;b)) \subset L^1((a;b)).$$

2. Prostor $\left(C(\langle a;b \rangle), \|\cdot\|_p \right)$ není úplný.

3. Lebesgueův prostor $\left(L^p((a;b)), \|\cdot\|_p \right)$ je zúplněním prostoru $\left(C^\infty(\langle a;b \rangle), \|\cdot\|_p \right)$.

4. Sobolevův prostor $\left(W^{k,p}((a;b)), \|\cdot\|_{k,p} \right)$ je zúplněním prostoru $\left(X, \|\cdot\|_{k,p} \right)$, kde

$$X := \{ f \in C^\infty((a;b)) : \ \|f\|_{k,p} \text{ je konečná} \}.$$