KMA/UFA

Úvod do funkcionální analýzy

pracovní verze textu

poslední změna: 20.11.2020

připomínky a komentáře zasílejte na pnecesal@kma.zcu.cz

Kapitola 3

Prostory se skalárním součinem, Hilbertovy prostory

Definice 3.1 Mějme lineární (vektorový) prostor X nad tělesem $\mathbb{T}$ ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Zobrazení $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{T}$ nazveme <u>skalární součin</u> na X, pokud platí

(S1) $\forall\, x \in X : \quad (x,x) \geq 0$ (axiom nezápornosti);

(S2) $\forall\, x \in X : \quad (x,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \mathtt{0}$ (axiom totožnosti);

(S3) $\forall\, x,y \in X : \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$ (hermiteovská symetrie);

(S4) $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{T}\; \forall\, x,y,z \in X : \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha\,(x,z) + \beta\,(y,z)$ (linearita v 1. složce).

Dvojici $(X,(\cdot,\cdot))$ pak nazýváme <u>unitárním prostorem</u> (UP).

Poznámka

1. $\forall\, x \in X : \;(x,x) \in \mathbb{R}$
2. $\forall\, x \in X : \;(\mathtt{0},x) = (0\cdot x, x) = 0\cdot(x,x) = 0$
3. Skalární součin je antilineární ve 2. složce:

$$\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{T}\; \forall\, x,y,z \in X : \;(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\,(x,y) + \overline{\beta}\,(x,z)\,.$$

4. Za předpokladu platnosti (S4) lze axiomy (S1) a (S2) ekvivalentně nahradit pomocí axiomu pozitivní definitnosti

$$\forall\, x \in X \setminus \{\mathtt{0}\} : \;(x,x) > 0.$$

Skalární součin je tedy pozitivně definitní hermiteovská seskvilineární forma.

Lemma 3.1 Mějme `UP` $(X, (\cdot,\cdot))$ a definujme zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}.$$

Potom platí

1. $\|\cdot\|$ je norma (indukovaná skalárním součinem) na X a $(X, \|\cdot\|)$ je `NLP`;
2. $\forall\, x, y \in X : \ |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchyova – Schwarzova – Buňakovského nerovnost);
3. $\forall\, x, y \in X : \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$ (rovnoběžníkové pravidlo).

Poznámka

1. V Cauchyově – Schwarzově – Buňakovského nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když x a y jsou lineárně závislé.
2. Pokud zobrazení $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{T}$ splňuje axiomy (`S1`), (`S3`) a (`S4`), potom zobrazení $(\cdot,\cdot)$ představuje pozitivně semidefinitní hermiteovskou seskvilineární formu a zobrazení $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ je seminorma na X (splňuje (`N2`) a (`N3`)).

Lemma 3.2 Skalární součin je spojité zobrazení.

Věta 3.1 Mějme reálný `NLP` $(X, \|\cdot\|)$, na kterém platí rovnoběžníkové pravidlo

$$\forall\, x, y \in X : \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 .$$

Potom zobrazení $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ definované jako

$$(x,y) := \tfrac{1}{4}\,\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|x-y\|^2$$

je skalárním součinem na X, prostor $(X, (\cdot,\cdot))$ je `UP` a pro každé $x \in X$ platí $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Poznámka

1. Na komplexním `NLP` $(X, \|\cdot\|)$, na kterém platí rovnoběžníkové pravidlo, lze zavést skalární součin $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ jako
$$(x,y) := \tfrac{1}{4}\,\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|x-y\|^2 + \mathrm{i}\left(\tfrac{1}{4}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2\right).$$
2. Každý `UP` je zároveň `NLP`. `NLP` však nemusí být `UP`. Na daném `NLP` $(X, \|\cdot\|)$ lze zavést skalární součin $(\cdot,\cdot)$, který indukuje zadanou normu $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$, právě tehdy, když na `NLP` platí rovnoběžníkové pravidlo.

Příklad: Prostor $C(\langle a;b\rangle)$ se skalárním součinem $(f,g) = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, je unitární prostor.

Definice 3.2 Mějme UP $(X,(\cdot,\cdot))$ a dvě neprázdné množiny $A,B \subset X$. Řekneme, že

1. prvky $x,y \in X$ jsou ortogonální (a píšeme $x \perp y$), pokud platí $\quad (x,y) = 0.$
2. množiny A,B jsou ortogonální (a píšeme $A \perp B$), pokud platí $\quad \forall\, x \in A\ \forall\, y \in B:\ x \perp y.$

Dále zápisem $x \perp B$ rozumíme $\{x\} \perp B$.

Definice 3.3 Mějme UP $(X,(\cdot,\cdot))$ a množinu $S \subset X$. Řekneme, že množina S je

1. lineárně nezávislá, pokud pro každé navzájem různé prvky $x_1,\dots,x_n \in S$ jsou tyto prvky lineárně nezávislé;
2. ortogonální, pokud platí $\quad \forall\, x,y \in S:\ x \neq y \ \Rightarrow\ x \perp y$;
3. ortonormální, pokud je ortogonální a platí $\quad \forall\, x \in S:\ \|x\| = \sqrt{(x,x)} = 1.$

Lemma 3.3

1. Každá ortogonální množina nenulových prvků je lineárně nezávislá.
2. Mějme ortogonální množinu S. Jestliže $\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\dots,\mathrm{u}_n \in S$, potom platí

$$\|\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_n\|^2 \;=\; \|\mathrm{u}_1\|^2 + \|\mathrm{u}_2\|^2 + \cdots + \|\mathrm{u}_n\|^2 \qquad \text{(Pythagorova věta).}$$

Definice 3.4 Mějme UP $(X,(\cdot,\cdot))$ a ortonormální množinu $S \subset X$. Řekneme, že

1. ortonormální množina S je ortonormální báze prostoru X, pokud její lineární obal $(\mathrm{Lin}\, S)$ [a] je hustá množina v X, tj. pokud
$$\overline{\mathrm{Lin}\, S} = X,$$
2. ortonormální množina S je úplná, pokud platí $\quad \forall\, x \in X:\ x \perp S \implies x = 0.$

[a] $\mathrm{Lin}\, S = \{\ \alpha_1\mathrm{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathrm{e}_n :\ n \in \mathbb{N};\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{T};\ \mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n \in S\ \}$

Poznámka V každém UP $(X,(\cdot,\cdot))$ existuje jen jeden prvek $x \in X$, který je kolmý na X (tj. $x \perp X$), a je to právě nulový prvek $x = 0$.

Definice 3.5 Mějme UP $(X, (\cdot, \cdot))$ a v něm neprázdnou množinu $M \subset X$.
Ortogonální doplněk množiny M v prostoru X je množina

$$M^\perp := \left\{ x \in X : \ x \perp M \right\}.$$

Poznámka Ortonormální množina S je úplná právě tehdy, když $S^\perp = \{\mathtt{0}\}$.

Lemma 3.4 Ortogonální doplněk $M^\perp$ je uzavřený lineární podprostor unitárního prostoru X.

Definice 3.6 Unitární prostor $(X, (\cdot, \cdot))$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud (X, ϱ) je úplný metrický prostor s metrikou indukovanou skalárním součinem ($\varrho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$).

Příklad:

1. Prostor $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, se skalárním součinem $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$ je Hilbertův prostor.
2. Prostor l^2 se skalárním součinem $(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \overline{y_n}$ je Hilbertův prostor.
3. Prostor $L^2((a; b))$ se skalárním součinem $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, je Hilbertův prostor.

Poznámka

1. Pro každou neprázdnou podmnožinu M unitárního prostoru $(X, (\cdot, \cdot))$ platí $M \subset M^{\perp\perp}$.
2. Pro každý lineární podprostor M Hilbertova prostoru $(H, (\cdot, \cdot))$ platí $\overline{M} = M^{\perp\perp}$.
3. Pro každý uzavřený lineární podprostor M Hilbertova prostoru $(H, (\cdot, \cdot))$ platí $M = M^{\perp\perp}$.

Věta 3.2 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$ a v něm uzavřený lineární podprostor $M \subset H$.
Potom platí

$$\forall\, z \in H \ \exists!\, x \in M \ \exists!\, y \in M^\perp : \ z = x + y$$

a říkáme, že Hilbertův prostor H je direktním součtem podprostorů M a $M^\perp$ a píšeme

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Věta 3.3 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$ a ortonormální množinu $S \subset H$.

Ortonormální množina S je úplná právě tehdy, když S je ortonormální báze prostoru H.

Příklad:

1. Ortonormální báze prostoru $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je ortonormální množina $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$, kde
$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0), \\ \mathsf{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0), \\ &\vdots \\ \mathsf{e}_n &= (0,0,0,\ldots,0,1). \end{aligned}$$

2. Ortonormální báze prostoru l^2 je tvořena posloupnostmi
$$\mathsf{e}_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots) = (\delta_{kn})_{k=1}^{+\infty}, \quad n \in \mathbb{N},$$
kde δ_{kn} je Kroneckerovo delta ($\delta_{kn} = 1$ pro $k = n$ a $\delta_{kn} = 0$ pro $k \neq n$).

3. Ortonormální báze (komplexního) prostoru $L^2((-\pi;\pi))$ je tvořena funkcemi
$$\mathsf{e}_n(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nx) + \mathrm{i} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2((-\pi;\pi))$ je tvořena funkcemi
$$\mathsf{e}_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathsf{e}_{2n-1}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad \mathsf{e}_{2n}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2((0;\pi))$ je tvořena funkcemi
$$\mathsf{e}_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathsf{e}_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2((0;\pi))$ je tvořena funkcemi
$$\mathsf{e}_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

7. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2((-1;1))$ je tvořena funkcemi
$$\mathsf{e}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
kde P_n jsou Legendreovy polynomy
$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_{n+1}(x) = \tfrac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \tfrac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2(\mathbb{R})$ je tvořena funkcemi

$$\mathsf{e}_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}} \cdot H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde H_n jsou Hermiteovy polynomy

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = 2x, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

9. Ortonormální báze (reálného) prostoru $L^2((0; +\infty))$ je tvořena funkcemi

$$\mathsf{e}_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cdot L_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde L_n jsou Laguerreovy polynomy

$$L_0(x) \equiv 1, \qquad L_1(x) = 1 - x, \qquad L_{n+1}(x) = \tfrac{2n+1-x}{n+1} L_n(x) - \tfrac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 3.5 Mějme Banachův prostor $(X, \|\cdot\|)$ a v něm posloupnost $(x_n) \subset X$.
Jestliže řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ konverguje v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konverguje v $(X, \|\cdot\|)$.

Věta 3.4
Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$ a v něm ortogonální posloupnost $(\mathrm{u}_n)_{n=1}^{+\infty} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n, \ldots)$.

1. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{u}_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathrm{u}_n\|^2$.
2. Pokud řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{u}_n$ konverguje, potom platí

$$\|\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_n + \cdots\|^2 \;=\; \|\mathrm{u}_1\|^2 + \|\mathrm{u}_2\|^2 + \cdots + \|\mathrm{u}_n\|^2 + \cdots$$

Poznámka Gramova – Schmidtova ortonormalizace

Mějme posloupnost $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ lineárně nezávislých prvků Hilbertova prostoru H. Definujme posloupnost $(\mathsf{e}_n) = (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_n, \ldots)$ prvků Hilbertova prostoru H následujícím rekurentním postupem

$$\mathsf{e}_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}, \qquad \mathsf{e}_{n+1} := \frac{x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} (x_{n+1}, \mathsf{e}_k)\, \mathsf{e}_k}{\left\| x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} (x_{n+1}, \mathsf{e}_k)\, \mathsf{e}_k \right\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost (e_n) je ortonormální.

Věta 3.5 (o Fourierových řadách)

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$ a v něm ortonormální posloupnost $(\mathsf{e}_n)_{n=1}^{+\infty} = (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \dots, \mathsf{e}_n, \dots)$. Potom platí

1. $\forall\, x \in H : \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, \mathsf{e}_n)|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);

2. $\forall\, x \in H :$ Fourierova řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (x, \mathsf{e}_n)\, \mathsf{e}_n$ konverguje v H;

3. $\forall\, x \in H : x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (x, \mathsf{e}_n)\, \mathsf{e}_n \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, \mathsf{e}_n)|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost).

Věta 3.6

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$ a v něm ortonormální posloupnost $(\mathsf{e}_n)_{n=1}^{+\infty} = (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \dots, \mathsf{e}_n, \dots)$. Ortonormální posloupnost (e_n) je úplná právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost.

Věta 3.7

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$, který má spočetnou ortonormální bázi $(\mathsf{e}_n)_{n=1}^{+\infty} = (\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \dots, \mathsf{e}_n, \dots)$. Potom je Hilbertův prostor H izometricky izomorfní s l^2.

Poznámka

1. Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.
2. Každý separabilní Hilbertův prostor má spočetnou ortnonormální bázi.

   Separabilní Hilbertův prostor je takový, který obsahuje hustou spočetnou podmnožinu.