KMA/UFA

Úvod do funkcionální analýzy

pracovní verze textu

poslední změna: 29.12.2021

připomínky a komentáře zasílejte na pnecesal@kma.zcu.cz

Kapitola 4

Lineární operátory, duální prostory

Definice 4.1 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a zobrazení T z X do Y. Pro T definujme množiny

$$\mathcal{D}(T) := \{\ x \in X :\ T(x) \in Y\ \} \qquad (\ \underline{\text{definiční obor}}\ T\ ),$$
$$\mathcal{R}(T) := \{\ y \in Y :\ y = T(x),\ x \in \mathcal{D}(T)\ \} \qquad (\ \underline{\text{obor hodnot}}\ T\ ).$$

Pokud píšeme $T : X \longrightarrow Y$, tak předpokládáme, že $\mathcal{D}(T) = X$ a $\mathcal{R}(T) \subset Y$.

Pokud píšeme $T : X \xrightarrow{\text{na}} Y$, tak předpokládáme, že $\mathcal{D}(T) = X$ a $\mathcal{R}(T) = Y$.

Definice 4.2 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a zobrazení $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ s $\mathcal{D}(T) \subset X$.
Řekneme, že zobrazení T je <u>spojité v bodě</u> $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, pokud platí

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}(T) :\ \|x - x_0\|_X < \delta\ \Rightarrow\ \|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon.$$

Řekneme, že T je <u>spojité</u>, pokud je spojité v každém bodě $x_0 \in \mathcal{D}(T)$.

Poznámka

1. Zobrazení T je spojité v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ právě tehdy, když pro každou posl. (x_n) prvků z $\mathcal{D}(T)$ platí
$$\|x_n - x_0\|_X \longrightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|T(x_n) - T(x_0)\|_Y \longrightarrow 0.$$
2. Pokud $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ je izolovaným bodem $\mathcal{D}(T)$, potom T je spojité v bodě x_0.

Definice 4.3 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a lineární zobrazení $T : X \to Y$.
Řekneme, že lineární zobrazení T je <u>omezené</u>, pokud platí

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in X :\ \|Tx\|_Y \le c \cdot \|x\|_X\,.$$

Věta 4.1 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a lineární zobrazení $T : X \to Y$.
Potom platí

$$T \text{ je spojité (na } X\text{)} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ je spojité v bodě } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ je omezené.}$$

Definice 4.4 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
Označme $\mathcal{L}(X, Y)$ množinu všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y, na které definujeme součet a skalární násobek

$$\forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y) : (T_1 + T_2)x := T_1 x + T_2 x,$$
$$\forall\, \alpha \in \mathbb{T}\ \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y) : \qquad (\alpha T)x := \alpha \cdot (Tx).$$

Dále definujme zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{R}_0^+$ jako

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y\,.$$

Pokud $Y = X$, potom místo $\mathcal{L}(X, X)$ píšeme jen $\mathcal{L}(X)$.

Věta 4.2 Prostor $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$ je normovaný lineární prostor.
Pokud $(Y, \|.\|_Y)$ je Banachův prostor, potom $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$ je také Banachův prostor.

Lemma 4.1 Mějme `NLP` $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y) : \quad \|T\| &= \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \inf \left\{\ c > 0 :\ \|Tx\|_Y \le c \cdot \|x\|_X\ \right\}. \end{aligned}$$

Věta 4.3 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a lineární zobrazení $T : X \xrightarrow{\text{na}} Y$.
Potom inverzní zobrazení $T^{-1} : Y \xrightarrow{\text{na}} X$ existuje a je lineární a omezené právě tehdy, když platí

$$\exists\, d > 0\ \forall\, x \in X :\ d \cdot \|x\|_X \le \|Tx\|_Y\,.$$

Poznámka Mějme NLP $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Je-li T izomorfismus X na Y, potom zobrazení T a T^{-1} jsou spojitá a tedy $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Definice 4.5 Mějme normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ nad tělesem $\mathbb{T}$ ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Každé zobrazení $F : X \to \mathbb{T}$ nazveme funkcionálem na X. Normovaný lineární prostor $(\mathcal{L}(X,\mathbb{T}), \|\cdot\|)$ všech spojitých lineárních funkcionálů na X nazveme duálním prostorem k prostoru $(X, \|\cdot\|_X)$ a značíme ho $(X^*, \|\cdot\|_*)$, kde

$$\|F\|_* := \sup_{\|x\|_X = 1} |Fx|.$$

Poznámka Duální prostor $(X^*, \|\cdot\|_*)$ k normovanému lineárnímu prostoru $(X, \|\cdot\|_X)$ je Banachův prostor.

Poznámka

Mějme konečné $p, q > 1$ tak, že q je konjugovaný exponent k p (tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $-\infty < a < b < +\infty$.

1. Prostor $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ je duálním prostorem k prostoru $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.
2. Prostor $(L^q((a;b)), \|\cdot\|_q)$ je duálním prostorem k prostoru $(L^p((a;b)), \|\cdot\|_p)$.
3. Prostor $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ je duálním prostorem k prostoru $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
4. Prostor $(L^\infty((a;b)), \|\cdot\|_\infty)$ je duálním prostorem k prostoru $(L^1((a;b)), \|\cdot\|_1)$.
5. Prostor $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ není duálním prostorem k prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
6. Prostor $(L^1((a;b)), \|\cdot\|_1)$ není duálním prostorem k prostoru $(L^\infty((a;b)), \|\cdot\|_\infty)$.

Pro prostory posloupností tedy máme

$$\left(\ell^p\right)^* \approx \ell^q, \quad \left(\ell^1\right)^* \approx \ell^\infty, \quad \left(\ell^\infty\right)^* \not\approx \ell^1$$

a pro prostory funkcí můžeme psát

$$\big(L^p((a;b))\big)^* \approx L^q((a;b)), \quad \big(L^1((a;b))\big)^* \approx L^\infty((a;b)), \quad \big(L^\infty((a;b))\big)^* \not\approx L^1((a;b)).$$

Věta 4.4 (Hahnova – Banachova věta o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu)

Mějme NLP $(X, \|\cdot\|_X)$ a netriviální lineární podprostor $M \subset X$. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál $G \in M^*$ existuje spojitý lineární funkcionál $F \in X^*$ tak, že platí

$$\big(\, \forall x \in M : Fx = Gx \,\big) \quad \text{a} \quad \|F\|_* = \|G\|_* .$$

Poznámka Poznámky Hahnově – Banachově větě o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu:

1. Pokud je prostor X Hilbertovým prostorem, potom je funkcionál $F \in X^*$ určen jednoznačně.
2. Pokud je podprostor M hustý v X (tj. $\overline{M} = X$), potom je funkcionál $F \in X^*$ určen jednoznačně.

Důsledek 4.1 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a prvek $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$.

Potom existuje spojitý lineární funkcionál $F \in X^*$ tak, že platí

$$\|F\|_* = 1 \quad \text{a} \quad Fx_0 = \|x_0\|_X .$$

Důsledek 4.2 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a dva prvky $x, y \in X$. Potom platí

$$\Big(\forall\, F \in X^* : \; Fx = Fy \Big) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Věta 4.5 (Rieszova věta o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu)

Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$ a funkcionál $F \in H^*$. Potom platí

$$\exists!\, u \in H \; \forall\, x \in H : \; Fx = (x, u)$$

a navíc $\|F\|_* = \|u\| = \sqrt{(u,u)}$.

Definice 4.6 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a posloupnost $(x_n) \subset X$.

Řekneme, že posloupnost (x_n) konverguje slabě k prvku $x \in X$, pokud

$$\forall\, F \in X^* : \; \lim_{n \to +\infty} Fx_n = Fx.$$

Prvek $x \in X$ pak nazýváme slabou limitou posloupnosti (x_n) a píšeme

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \text{nebo} \qquad x_n \rightharpoonup x.$$

Věta 4.6 Mějme NLP $(X, \|\cdot\|_X)$ a posloupnost $(x_n) \subset X$ a prvek $x \in X$. Potom platí

1. slabá limita posloupnosti (x_n) je určena jednoznačně;
2. $x_n \longrightarrow x \quad \Longrightarrow \quad x_n \xrightarrow{w} x$;
3. $x_n \xrightarrow{w} x \quad \Longrightarrow \quad (x_n)$ je omezená $\big($ tj. $\exists\, c > 0\ \forall\, n \in N: \ \|x_n\|_X \le c$ $\big)$;
4. $x_n \xrightarrow{w} x \quad \Longrightarrow \quad \|x\|_X \le \liminf\limits_{n \to +\infty} \|x_n\|_X$.

Lemma 4.2 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$, posloupnost $(x_n) \subset H$ a prvek $x \in H$. Potom platí

$$\left.\begin{array}{r} x_n \xrightarrow{w} x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \longrightarrow x.$$

Lemma 4.3 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$, posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset H$ a prvky $x, y \in H$. Potom platí

$$\left.\begin{array}{r} x_n \longrightarrow x \\ y_n \xrightarrow{w} y \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)\,.$$

Věta 4.7 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot))$ a zobrazení $T \in \mathcal{L}(H)$.
Potom existuje právě jeden operátor $T^* \in \mathcal{L}(H)$, pro který platí

$$\forall\, x, y \in H: \ (Tx, y) = (x, T^* y)\,.$$

Operátor T^* se nazývá adjungovaný operátor k T.

Definice 4.7 Mějme Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot))$ a lineární zobrazení $T : \mathcal{D}(T) \to H$, kde $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.

1. Adjungovaný operátor k T je definován jako zobrazení $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to H$ dané následovně

$$\mathcal{D}(T^*) := \Big\{ y \in H : \ \Big(\exists\, u \in H \ \forall\, x \in \mathcal{D}(T) : \ (Tx, y) = (x, u) \Big) \Big\} \qquad \text{a} \qquad T^* : \ y \mapsto u.$$

2. Řekneme, že operátor T je symetrický, pokud $\quad \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \quad$ a platí

$$\forall\, x \in \mathcal{D}(T) : \ T^* x = Tx.$$

3. Řekneme, že operátor T je samoadjungovaný, pokud $T = T^*$, tj. pokud $\quad \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*) \quad$ a platí

$$\forall\, x \in \mathcal{D}(T) : \ T^* x = Tx.$$

Definice 4.8 Mějme normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|_X)$.

1. Druhý duální prostor $(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ k prostoru $(X, \|\cdot\|_X)$ nazveme duální prostor k duálnímu prostoru $(X^*, \|\cdot\|_*)$.
2. Prostor X je reflexivní, pokud jsou prostory X^{**} a X izometricky izomorfní ($X^{**} \approx X$).

Věta 4.8 (Eberleinova – Šmuljanova)
Banachův prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je reflexivní právě tehdy, když lze z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

Definice 4.9 Mějme NLP $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a lineární zobrazení $T : X \to Y$.
Řekneme, že operátor T je kompaktní, pokud platí

$$\forall\, M \subset X : \quad M \text{ je omezená v } X \quad \Longrightarrow \quad \overline{T(M)} \text{ je kompaktní v } Y.$$

Poznámka Je-li $T : X \to Y$ kompaktní zobrazení, potom z každé omezené posloupnosti (x_n) prvků z X lze vybrat podposloupnost (x_{k_n}) tak, že posloupnost (Tx_{k_n}) konverguje v prostoru Y.

Věta 4.9 Každé lineární kompaktní zobrazení $T : X \to Y$ je omezené a spojité.

Definice 4.10 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a Banachův prostor $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tak, že $X \subset Y$. Řekneme, že

1. prostor X je spojitě vnořen do Y, pokud identické zobrazení $I : X \to Y$ je spojité, tj. pokud

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in X : \ \|x\|_Y \leq c \cdot \|x\|_X ,$$

   a píšeme $X \hookrightarrow Y$;

2. prostor X je kompaktně vnořen do Y, pokud identické zobrazení $I : X \to Y$ je kompaktní a píšeme $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Poznámka Mějme $-\infty < a < b < +\infty$. Potom platí

1. $L^2((a;b)) \hookrightarrow L^1((a;b))$,
2. $C^1((a;b)) \hookrightarrow\hookrightarrow C((a;b))$.

Definice 4.11 Mějme `NLP` $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ a zobrazení $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
Duální operátor T' k T je definován jako zobrazení $T' : Y^* \to X^*$ dané předpisem

$$T' : \ G \mapsto F, \quad \text{kde} \quad Fx := GTx, \ x \in X.$$

Věta 4.10 Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, potom $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a platí

$$\|T\| = \|T'\| .$$

Věta 4.11 (Hellingerova – Toeplitzova)
Každý symetrický lineární operátor, který je definovaný na celém Hilbertově prostoru, je již spojitý.