Lineární lomená funkce

$$f : w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{pro } z \neq \infty, \\ \dfrac{a}{c} & \text{pro } z = \infty, \end{cases} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

i) $H(f) = \mathbb{C}^*$,

ii) $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$,

iii) jednoznačná, spojitá a prostá funkce z $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^*$,

iv) $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{1}{c^2}(bc-ad)}{z+\frac{d}{c}}$,

v) inverzní zobrazení lineární lomené funkce je lineární lomená funkce

$$f^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a} & \text{pro } w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \\ \infty & \text{pro } w = \frac{a}{c}, \\ -\frac{d}{c} & \text{pro } w = \infty, \end{cases}$$

vi) lineární lomené zobrazení zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice (přímky a kružnice v $\mathbb{C}^*$ nazýváme zobecněnými kružnicemi v $\mathbb{C}^*$),

vii) lineární lomené zobrazení zobrazuje oblasti, na které rozděluje rovinu zobecněná kružnice γ na oblasti, na kterou rozděluje rovinu zobecněná kružnice $f(\gamma)$,

viii) lineární lomené zobrazení zachovává dvojpoměr

$$\forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^* : \; (z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)),$$

kde *dvojpoměr* uspořádané čtveřice navzájem různých bodů $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ je definován

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} & \text{pro } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, \\ \lim\limits_{z_k \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) & \text{pro } z_k = \infty, \; k \in \{1,2,3,4\}, \end{cases}$$

ix) lineární lomené zobrazení $w = f(z)$, které zobrazuje navzájem různé body $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ po řadě na navzájem různé body $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ je jediné a je určeno jednoznačně vztahem

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, w).$$