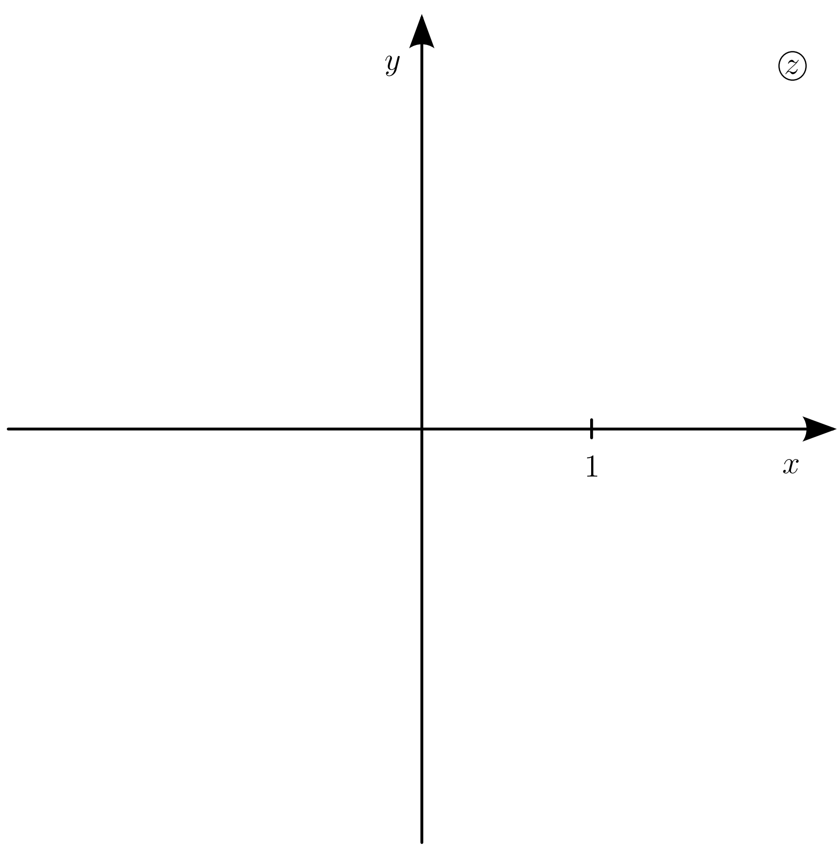
Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (reprezentace komplexních čísel)

Zapište následující komplexní čísla v jednotlivých tvarech:

$[x, y]$	$[1, 0]$	$[0, 1]$	$[-1, 1]$	$[0, 0]$
algebraický tvar				
maticový tvar	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
goniometrický tvar				
exponenciální tvar				

Obrazy těchto komplexních čísel zobrazte v Gaussově rovině:



Příklad 2. (součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v maticovém tvaru)
Mějme dvě komplexní čísla $z_1 = \mathrm{i}$ a $z_2 = \mathrm{i}$.

Určete

$$z_3 = z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_4 = z_1 - z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_5 = z_1 \cdot z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Příklad 3. (součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v maticovém tvaru)
Mějme dvě komplexní čísla $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ a $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

Určete

$$z_3 = z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_4 = z_1 - z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_5 = z_1 \cdot z_2 = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Příklad 4. (součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v algebraickém tvaru)

Mějme dvě komplexní čísla $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ a $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

Určete $z_3 = z_1 + z_2 = \dots\dots\dots\dots$,

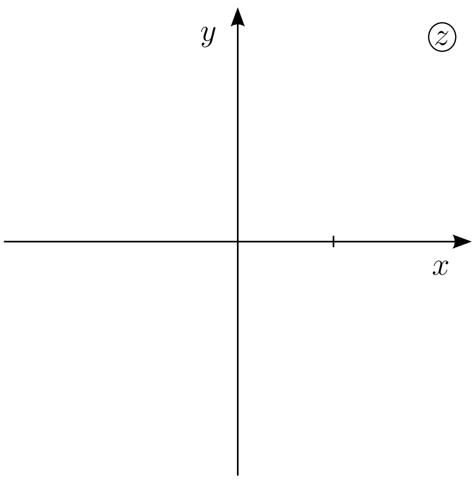
$z_4 = z_1 - z_2 = \dots\dots\dots\dots$,

$z_5 = z_1 \cdot z_2 = \dots\dots\dots\dots$,

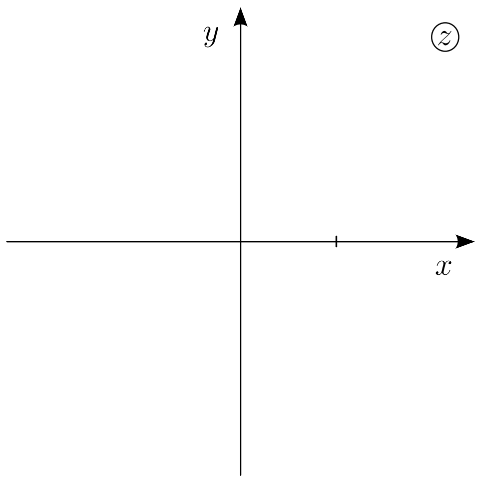
$z_6 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots\dots$.

Zakreslete v Gaussově rovině obrazy

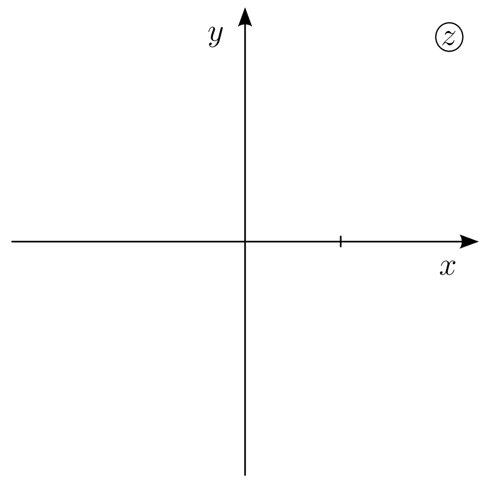
z_1, z_2, z_3 a z_4,



z_1, z_2 a z_5,



z_1, z_2 a z_6.



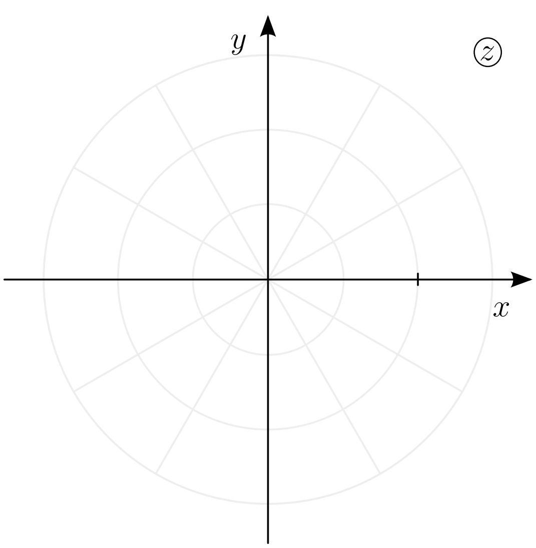
Příklad 5. (součin a podíl komplexních čísel v exponenciálním tvaru)

Mějme dvě komplexní čísla $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$ a $z_2 = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.

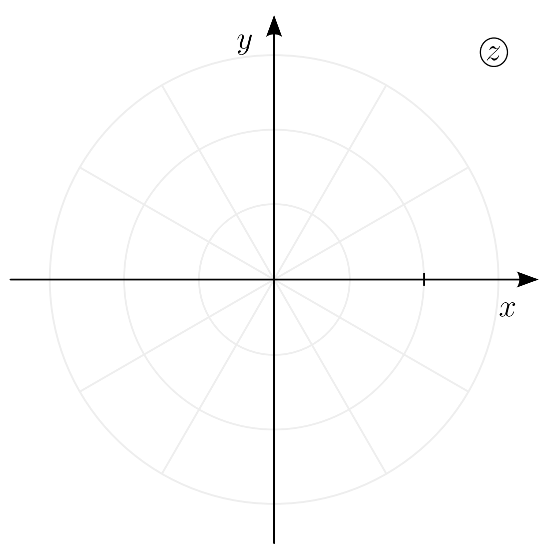
Určete $z_3 = z_1 \cdot z_2 = \dots\dots\dots\dots$,

$z_4 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots\dots$.

Zakreslete v Gaussově rovině obrazy z_1, z_2 a z_3,



z_1, z_2 a z_4.



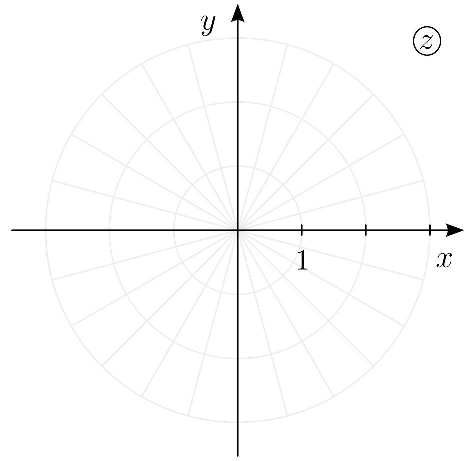
Příklad 6. (komplexně sdružené číslo)
Určete komplexně sdružená čísla (ve stejných tvarech) a obrazy všech čísel zobrazte v Gaussově rovině:

$$z_1 = 2 + \mathrm{i}, \qquad \overline{z_1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \overline{z_2} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix},$$

$$z_3 = 3\left(\cos(-\tfrac{5\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{5\pi}{6})\right), \qquad \overline{z_3} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_4 = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, \qquad \overline{z_4} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$



Příklad 7. (absolutní hodnota komplexního čísla)
V Gaussově rovině zobrazte obrazy zadaných čísel, určete jejich absolutní hodnoty a vyznačte je v obrázku:

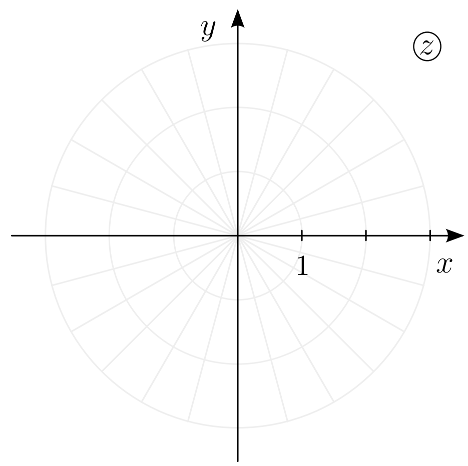
$$z_1 = 1 + \mathrm{i}, \qquad |z_1| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad |z_2|^2 = \det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \dots\dots,$$

$$|z_2| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_3 = 3\left(\cos(3\pi) + \mathrm{i}\sin(3\pi)\right), \qquad |z_3| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_4 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \qquad |z_4| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$



Příklad 8. (hlavní hodnota argumentu komplexního čísla)
Určete hlavní hodnotu argumentu a argument zadaných čísel. V Gaussově rovině zobrazte jejich obrazy a vyznačte jejich hlavní hodnotu argumentu:

$$z_1 = -2 + 2\mathrm{i}, \qquad \arg z_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

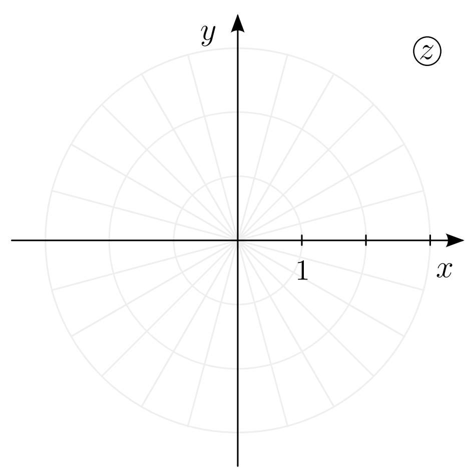
$$\operatorname{Arg} z_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{4}\right), \qquad \arg z_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\operatorname{Arg} z_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

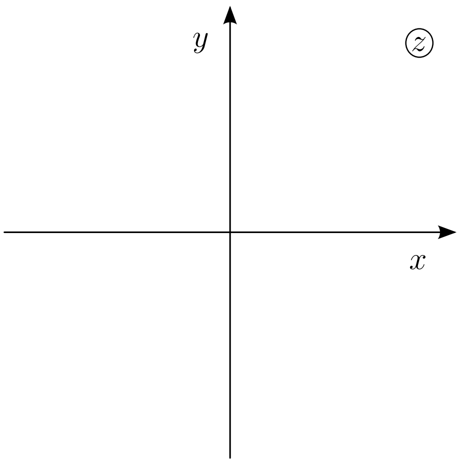
$$z_3 = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}, \qquad \arg z_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\operatorname{Arg} z_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

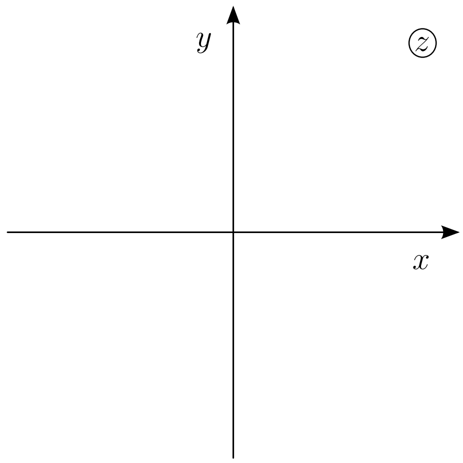


Příklad 9. (obrazy množin v Gaussově rovině) Zakreslete v Gaussově rovině obrazy následujících množin:

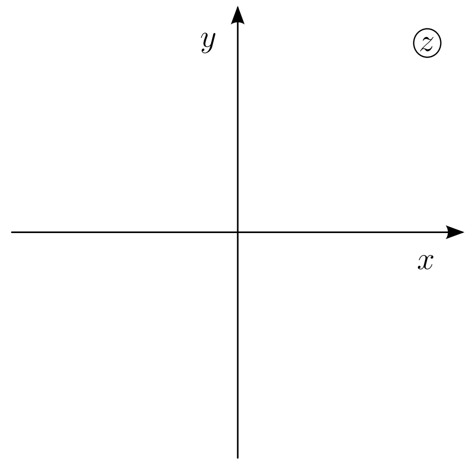
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\, z = 1\}$



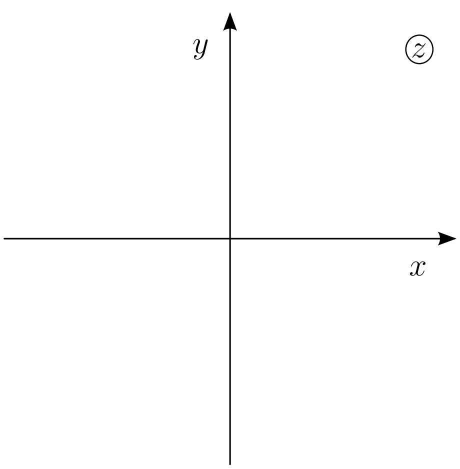
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z < 1\}$



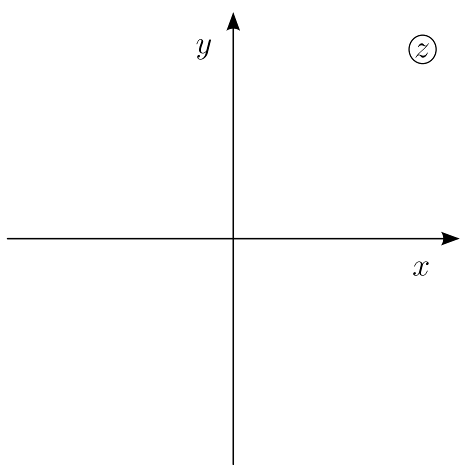
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\, z < \mathrm{Im}\, z\}$



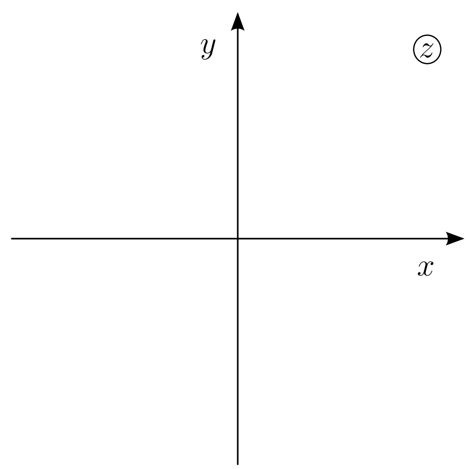
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$



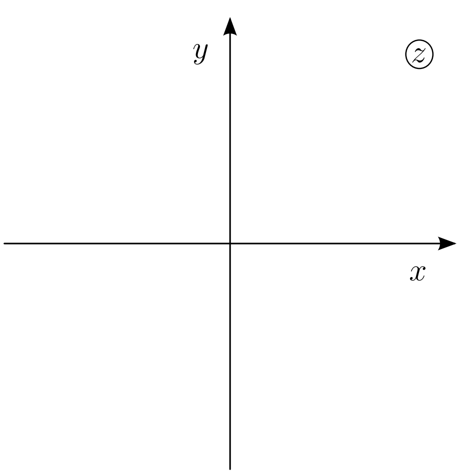
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| = 1\}$



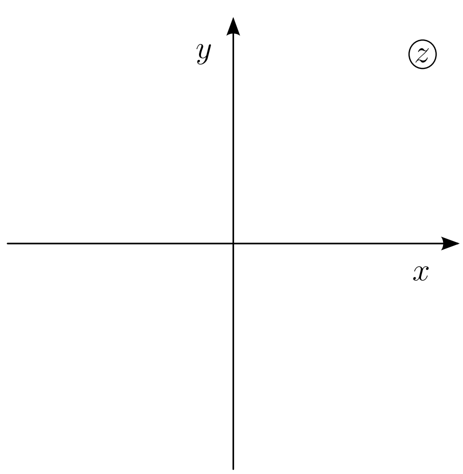
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \mathrm{i}| = 1\}$



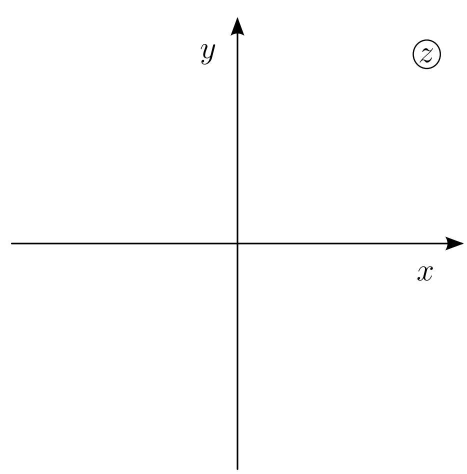
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1\}$



$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1| < 1\}$

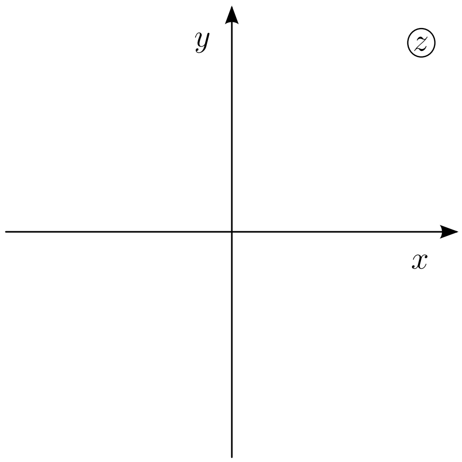


$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z + \mathrm{i}| > 1\}$

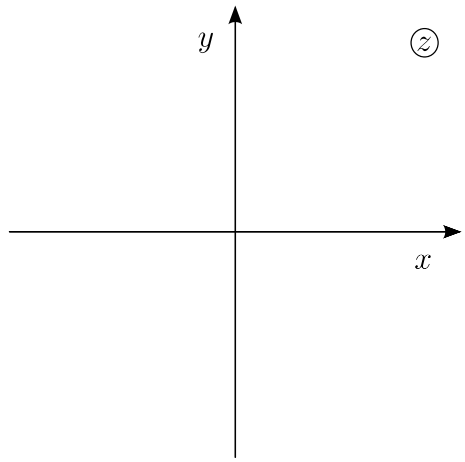


Příklad 10. (obrazy množin v Gaussově rovině) Zakreslete v Gaussově rovině obrazy následujících množin:

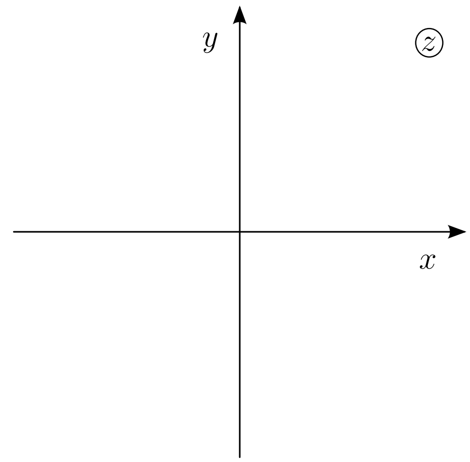
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ z = \overline{z}\}$



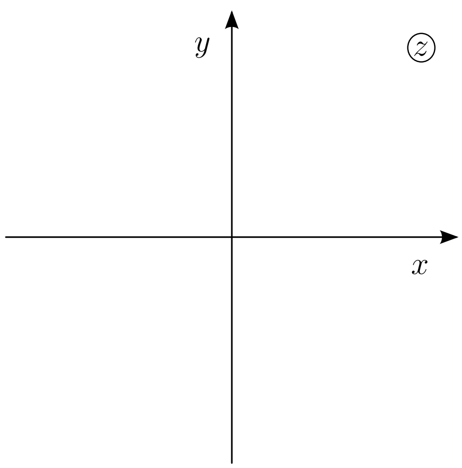
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ z \cdot \overline{z} = 2\}$



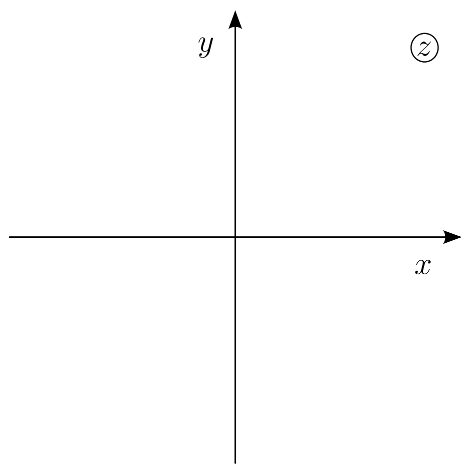
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ z + \overline{z} = 1\}$



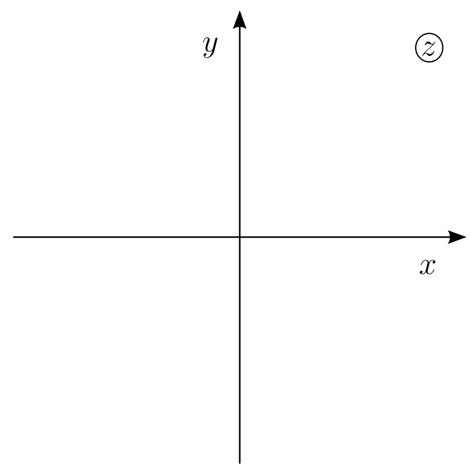
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ 1 < |z| < 2\}$



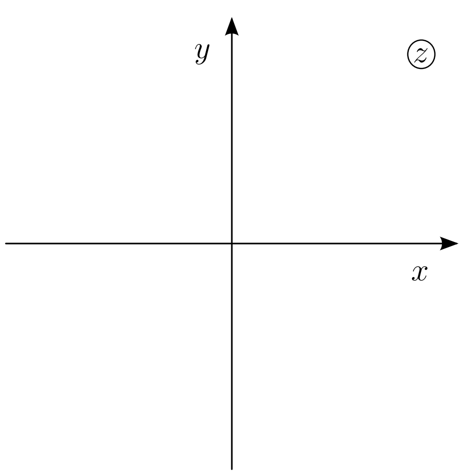
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ |z - \mathrm{i}| + |z + \mathrm{i}| = 4\}$



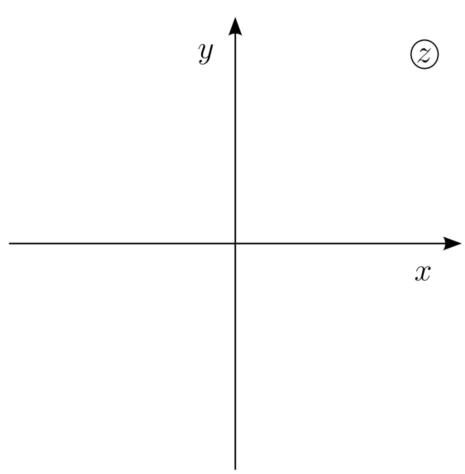
$M = \{z \in \mathbb{C}:\ |\operatorname{Im} z| < 1\}$



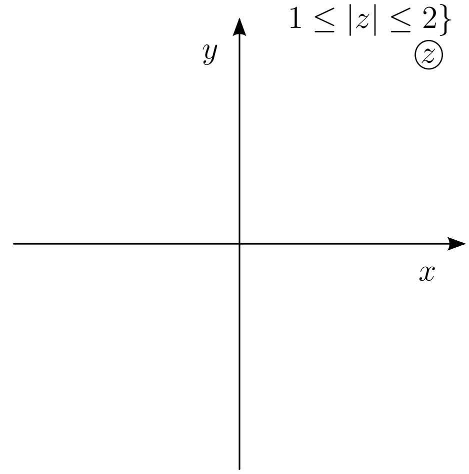
$M = \left\{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$



$M = \left\{z \in \mathbb{C}:\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$

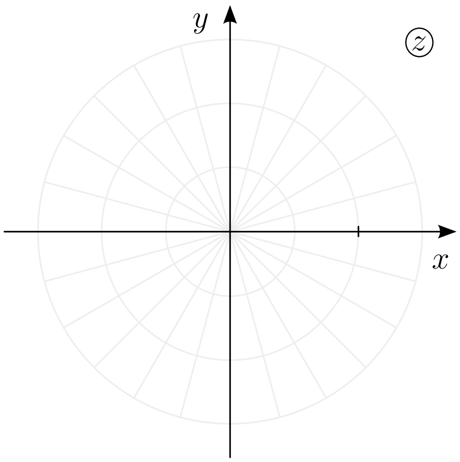


$M = \left\{z \in \mathbb{C}:\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4},\ 1 \le |z| \le 2\right\}$

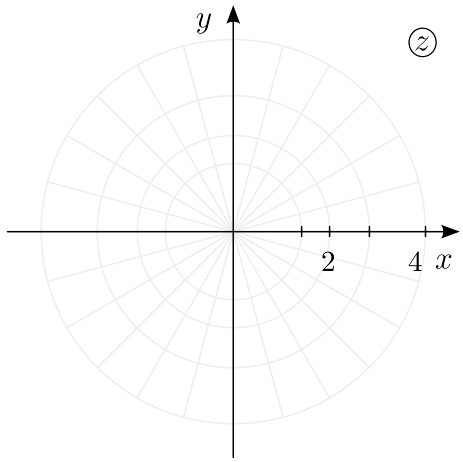


Příklad 11. (obrazy n-tých mocnin a odmocnin) Zakreslete obrazy následujících množin v Gaussově rovině:

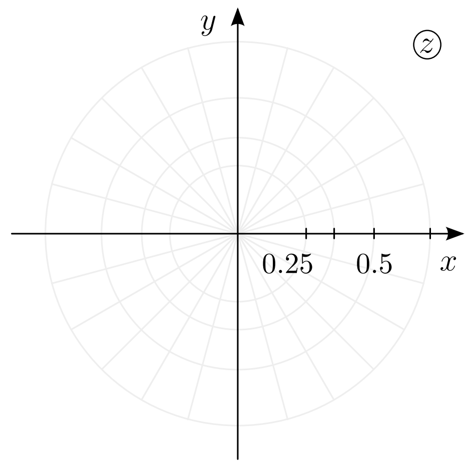
$\{\mathrm{i}, \mathrm{i}^2, \mathrm{i}^3, \mathrm{i}^4\}$



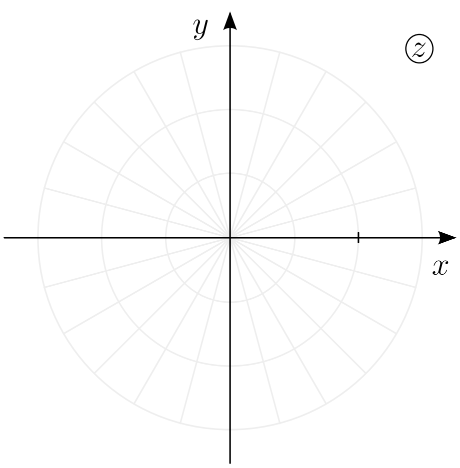
$\{(1+\mathrm{i}), (1+\mathrm{i})^2, (1+\mathrm{i})^3, (1+\mathrm{i})^4\}$



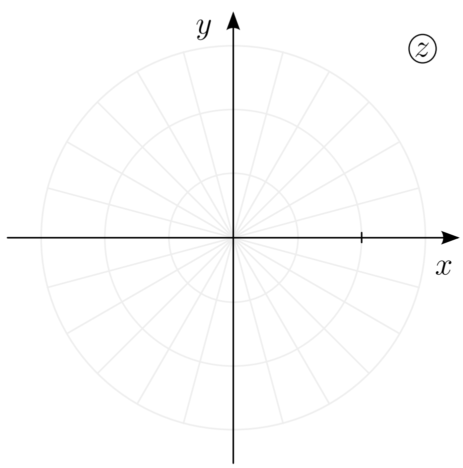
$\{z_1, z_1^2, z_1^3, z_1^4\}, \quad z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$



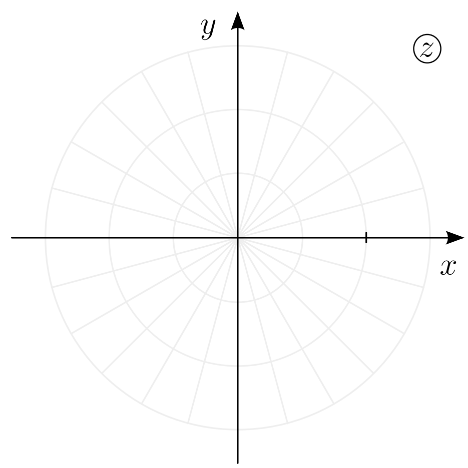
$\sqrt{-1}$



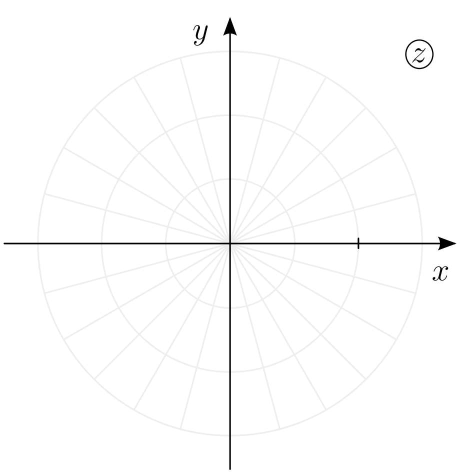
$\sqrt[3]{-1}$



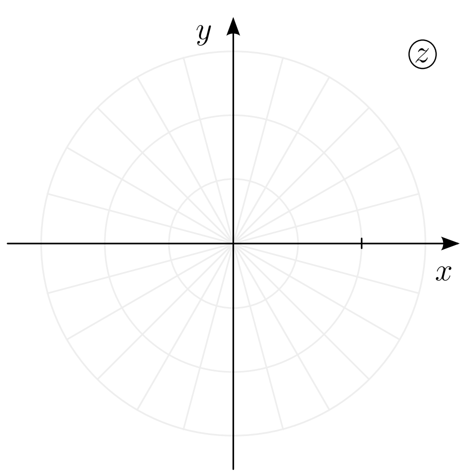
$\sqrt[4]{-1}$



$\sqrt{\mathrm{i}}$



$\sqrt[3]{\mathrm{i}}$



$\sqrt[4]{16\mathrm{i}}$