Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (nekonečno) Rozhodněte, zda je výraz definován. Pokud ano, výraz upravte:

1. $2 \cdot \infty + 3\,\mathrm{i} =$ ....
2. $0 \cdot \infty + 3\,\mathrm{i} =$ ....
3. $\infty \cdot \infty - 10^6 =$ ....
4. $\infty \cdot (1 + \mathrm{i}) =$ ....
5. $\infty + \infty \cdot \mathrm{i} =$ ....
6. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\infty} =$ ....
7. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2} =$ ....
8. $\dfrac{\infty}{1+\mathrm{i}^2} =$ ....
9. $\dfrac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^3}{1+\mathrm{i}^2} =$ ....

Příklad 2. (stereografická projekce)
Najděte obraz množiny M na Riemannově sféře při stereografické projekci:

1. $M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z| = 1\}$ ....

   ....

   ....

2. $M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z| < 1\}$ ....

   ....

   ....

3. $M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z| > 1\}$ ....

   ....

   ....

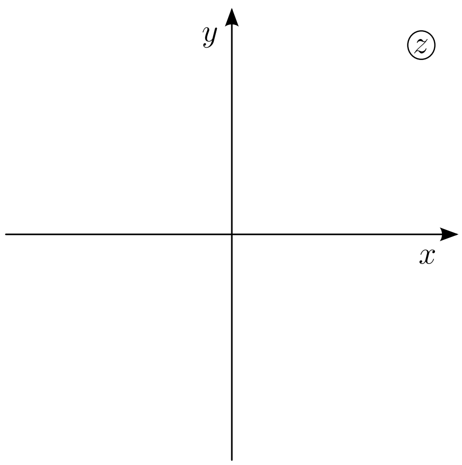
4. $M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ (\mathrm{i}-1)z = (\mathrm{i}+1)\overline{z}\}$ ....

   ....

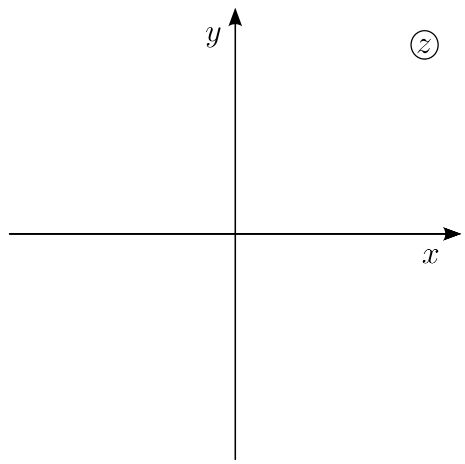
   ....

Příklad 3. (graf posloupnosti, omezenost a limita posloupnosti)
Načrtněte graf posloupnosti (z_n). Dále rozhodněte, zda je (z_n) omezená v $\mathbb{C}$ a určete její limitu v $\mathbb{C}^*$:

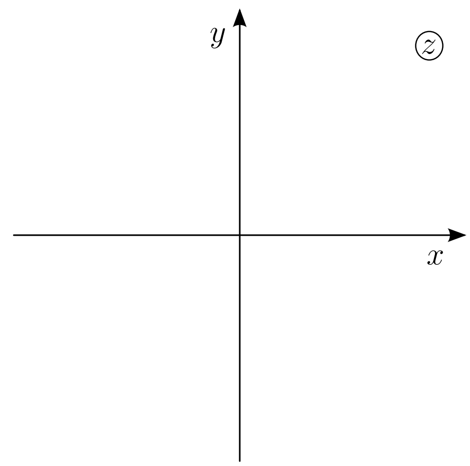
$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



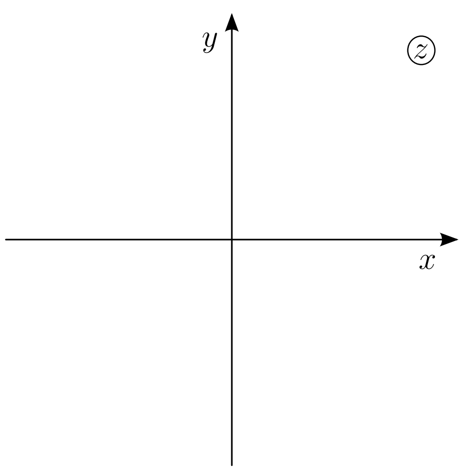
$z_n = \mathrm{i}^{2n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



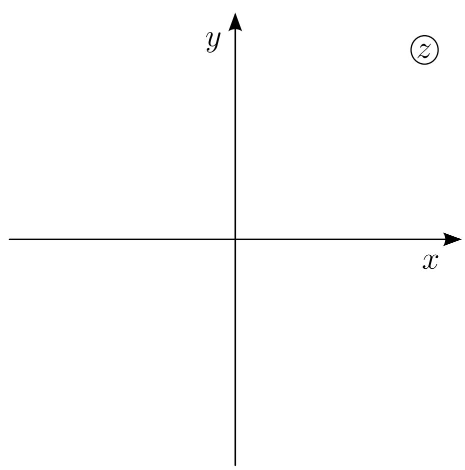
$z_n = n(1+\mathrm{i})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



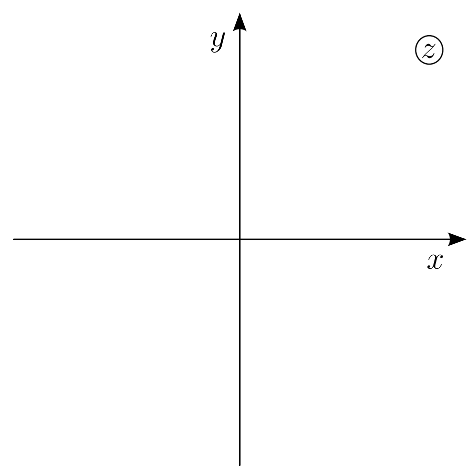
$z_n = \frac{\mathrm{i}^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



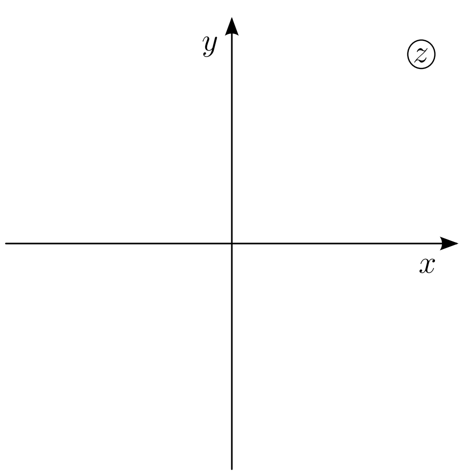
$z_n = \mathrm{i}^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



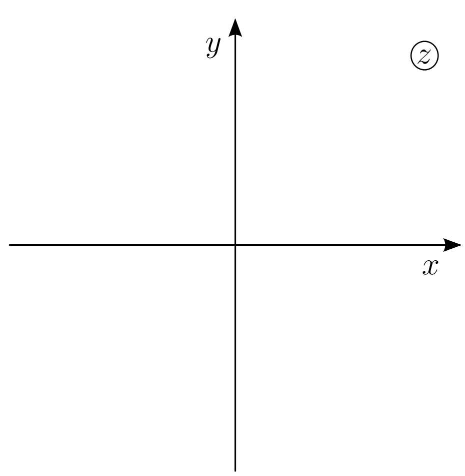
$z_n = n\ \mathrm{i}^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



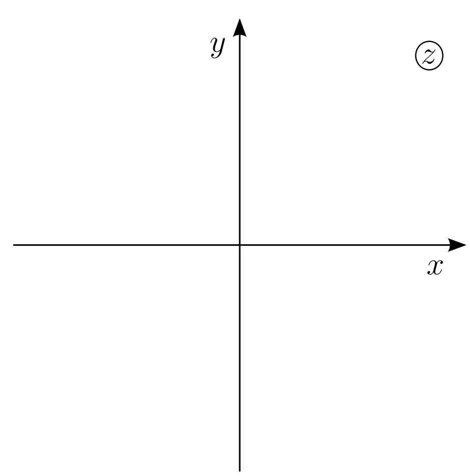
$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



$z_n = n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ldots\ldots$



Příklad 4. (omezená posloupnost)
Rozhodněte, zda je posloupnost (z_n) omezená v $\mathbb{C}$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

1. $z_n = \dfrac{1}{n} + n\,\mathrm{i}$ ....

2. $z_n = \mathrm{i} + \mathrm{i}^n$ ....

3. $z_n = \left(\mathrm{i} + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ....

Příklad 5. (limita posloupnosti) Vypočtěte v $\mathbb{C}^*$:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{i}^n + \mathrm{i}^{1+n} + \mathrm{i}^{2+n} + \mathrm{i}^{3+n}) =$ ....
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n - \mathrm{i}}{3 + n\,\mathrm{i}} =$ ....
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1 + 3\,\mathrm{i})^n =$ ....
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} ((-1)^n + 3^n\,\mathrm{i}) =$ ....
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n =$ ....
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n =$ ....
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} + \dfrac{2n+1}{n+3}\,\mathrm{i}\right) =$ ....
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n + \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n \mathrm{i}\right) =$ ....
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\pi}{n}\,\mathrm{i}\right)^n =$ ....
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+\mathrm{i}}\right)^n =$ ....

Příklad 6. (omezená a konvergentní posloupnost)
Rozhodněte, které z následujících implikací jsou pravdivé a které jsou nepravdivé. V případě neplatnosti některé z implikací uveďte vhodný protipříklad.

(z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}$ $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ (z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}^*$

$\Longrightarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

$\Longleftarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

(z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}$ $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ (z_n) je omezená

$\Longrightarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

$\Longleftarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ (z_n) není omezená

$\Longrightarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

$\Longleftarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

(z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}^*$ $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ (z_n) je omezená

$\Longrightarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

$\Longleftarrow$ platí / neplatí, protipříklad: ....

Příklad 7. (limita posloupnosti s parametrem)
Prozkoumejte, pro které hodnoty parametru $c \in \mathbb{C}$, existuje zadaná limita. Určete hodnotu limity v závislosti na c.

1. $$\lim_{n\to+\infty} |c|^n = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1, \end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} c^n = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } c = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1,\ c \neq 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1, \end{cases}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} n\,c^n = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } c = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1,\ c \neq 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1, \end{cases}$$

4. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n} = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } c = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1,\ c \neq 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1, \end{cases}$$

5. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{1+c^n} = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } c = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1,\ c \neq 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1, \end{cases}$$

6. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{1+c^{2n}} = \begin{cases} \dots\dots & \text{pro } |c| < 1, \\ \dots\dots & \text{pro } c = 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| = 1,\ c \neq 1, \\ \dots\dots & \text{pro } |c| > 1. \end{cases}$$

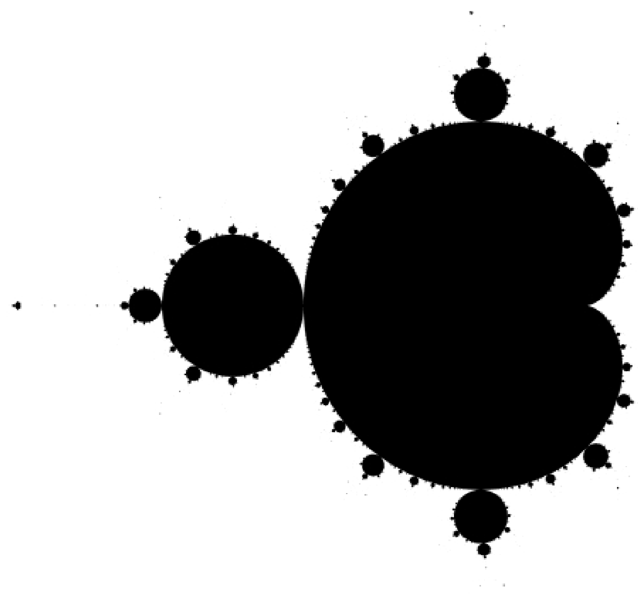
Příklad 8. (Mandelbrotova množina)
Uvažujme posloupnost (z_n) danou rekurentně předpisem

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_1 = 0, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Definujme Mandelbrotovu množinu

$$M = \{c \in \mathbb{C} : (z_n) \text{ je omezená posloupnost}\}.$$

1. Určete alespoň tři prvky, které patří do M: ....
2. Určete alespoň tři prvky, které nepatří do M: ....



Příklad 9. (vlastnosti Mandelbrotovy množiny)
Upravte následující věty na pravdivá tvrzení:

1. Mandelbrotova množina M je / není symetrická vzhledem k reálné ose.
2. Mandelbrotova množina M je / není symetrická vzhledem k imaginární ose.
3. Mandelbrotova množina M je / není omezená.
4. Mandelbrotova množina M je / není souvislá.
5. Mandelbrotova množina M je / není jednoduše souvislá.
6. Mandelbrotova množina M je / není uzavřená.
7. Mandelbrotova množina M je / není otevřená.
8. Mandelbrotova množina M má / nemá žádné vnitřní body.
9. Mandelbrotova množina M má / nemá žádné izolované body.

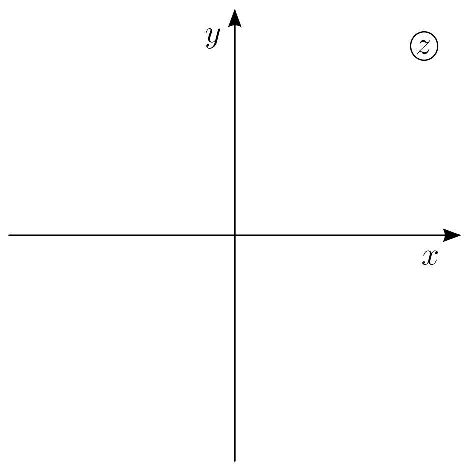
Příklad 10. (Juliova množina)
Uvažujme posloupnost (z_n) danou rekurentně předpisem

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_1, c \in \mathbb{C}.$$

Pro zvolený prvek $c \in \mathbb{C}$ definujme Juliovu množinu

$$K_c = \{z_1 \in \mathbb{C} : \ (z_n) \text{ je omezená posloupnost}\}.$$

1. Zakreslete obraz Juliovy množiny K_0:



2. Určete alespoň tři nenulové hodnoty parametru $c \in \mathbb{C}$, pro které má hranice Juliovy množiny ∂K_c fraktální strukturu:

3. Určete alespoň tři nenulové hodnoty parametru $c \in \mathbb{C}$, pro které je Juliova množina K_c souvislá množina:

4. Určete alespoň tři nenulové hodnoty parametru $c \in \mathbb{C}$, pro které má Juliova množina K_c alespoň dvě komponenty:

Příklad 11. (vlastnosti Juliovy množiny)
Upravte následující věty na pravdivá tvrzení:

1. Juliova množina K_c je / není symetrická podle počátku pro libovolné $c \in \mathbb{C}$.
2. Juliova množina K_c je / není symetrická vzhledem k reálné ose pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.
3. Juliova množina K_c je / není symetrická vzhledem k imaginární ose pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.
4. Juliova množina K_c je souvislá pro libovolné $c \in \operatorname{Int} M$ / $c \in \partial M$ / $c \in \mathbb{C} \setminus M$.