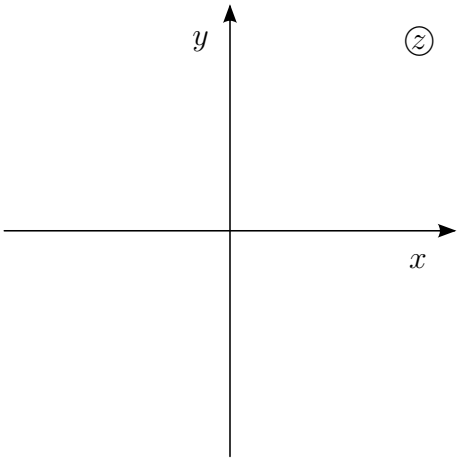
Jméno a PŘÍJMENÍ: .....

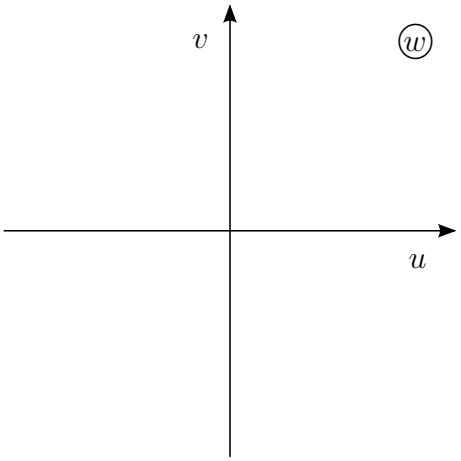
Příklad 1. (lineární funkce)
Určete a načrtněte obraz množiny M pomocí lineární funkce f. Určete f^{-1} ve tvaru lineární funkce.

$M = \{0, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1-2\,\mathrm{i}\}$, $f(M) = \{$.....$\}$.

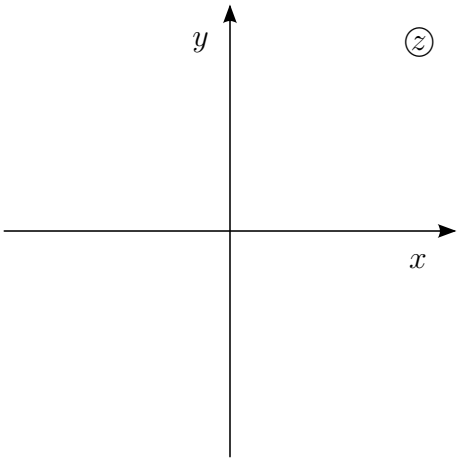


$f:\ w = \mathrm{i}\,z$

$f^{-1}:\ z =$ .....

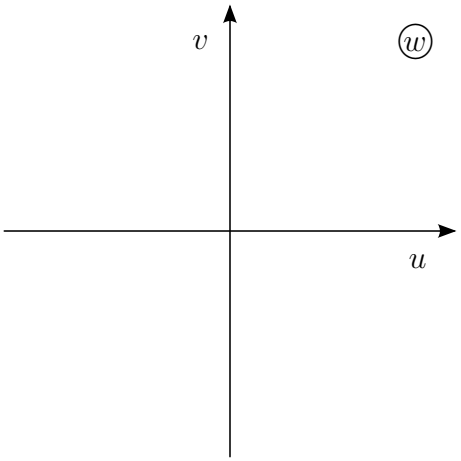


$M = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}:$ .....$\}$.

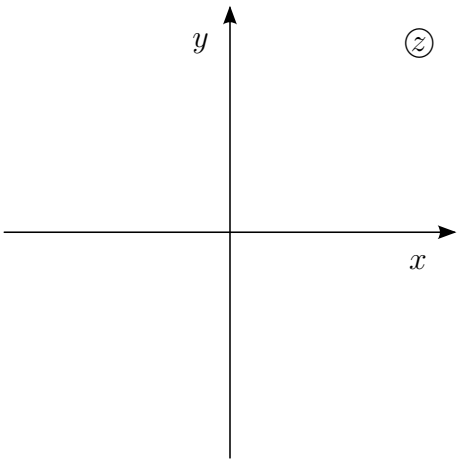


$f:\ w = (1-\mathrm{i})z$

$f^{-1}:\ z =$ .....

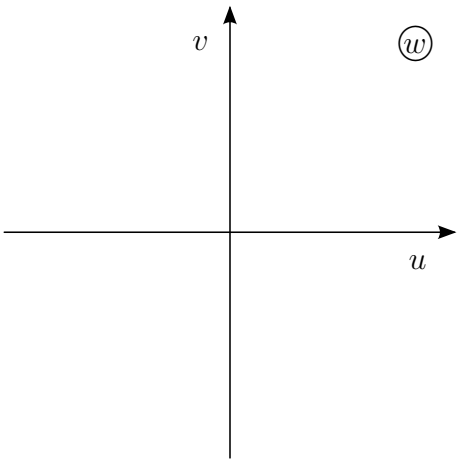


$M = \{z \in \mathbb{C}:\ |z+\mathrm{i}| > 1\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}:$ .....$\}$.



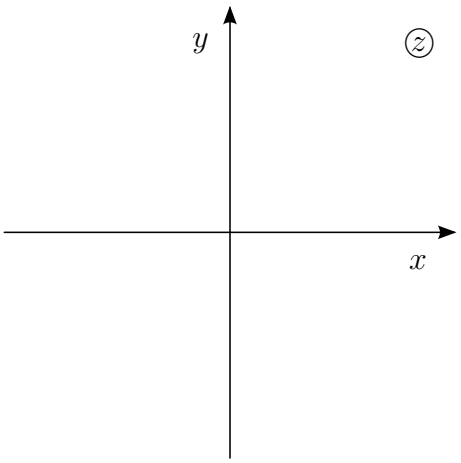
$f:\ w = -\dfrac{z}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

$f^{-1}:\ z =$ .....



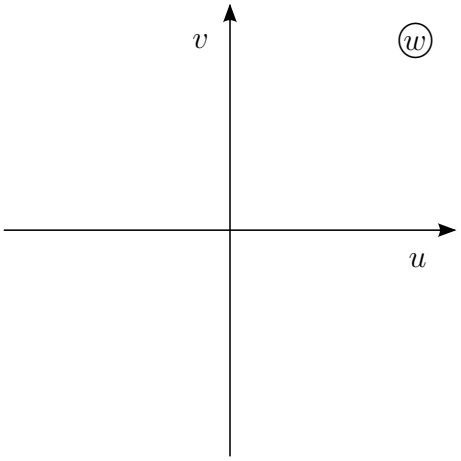
Příklad 2. (kruhová inverze) Určete a načrtněte obraz množiny M pomocí kruhové inverze.

$M = \{\frac{1}{2}, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}$, $f(M) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

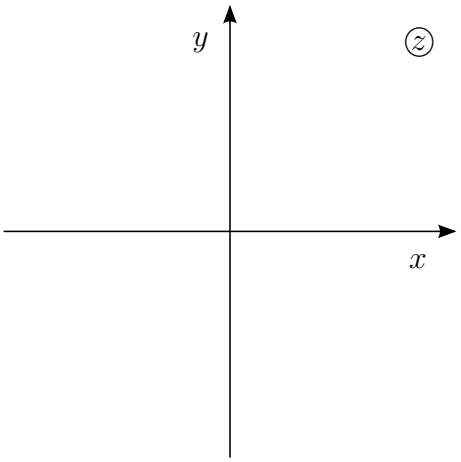


$$f:\ w = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$f^{-1}:\ z = \frac{1}{\overline{w}}$$

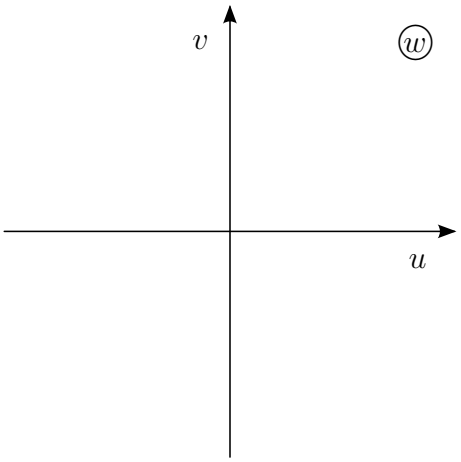


$M = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \geq 1,\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

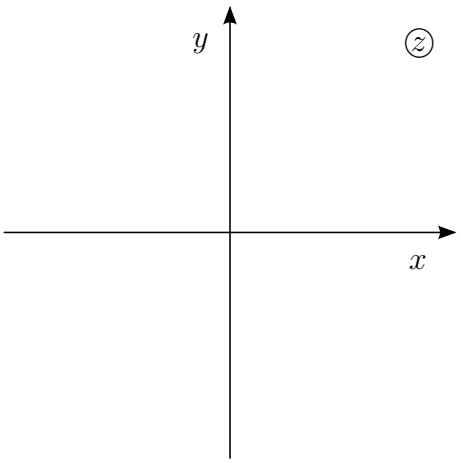


$$f:\ w = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$f^{-1}:\ z = \frac{1}{\overline{w}}$$

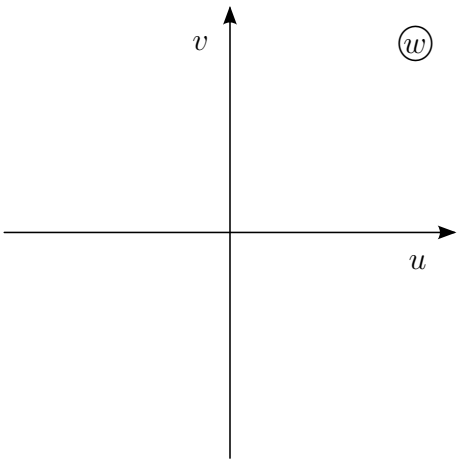


$M = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| > 1\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



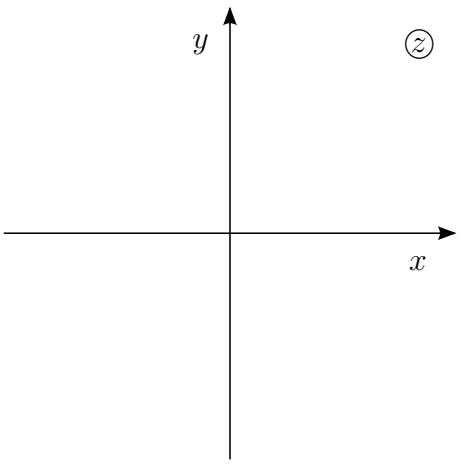
$$f:\ w = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$f^{-1}:\ z = \frac{1}{\overline{w}}$$

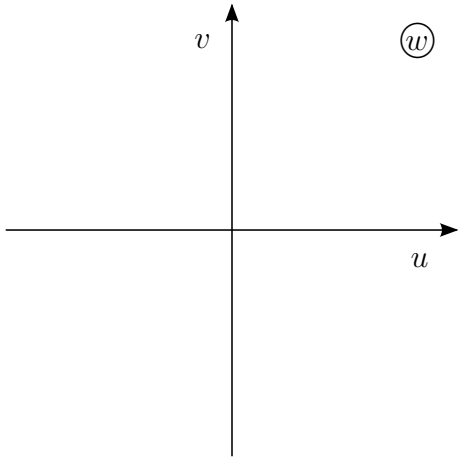


Příklad 3. (základní lineární lomená funkce)
Určete a načrtněte obraz množiny M pomocí základní lineární lomené funkce.

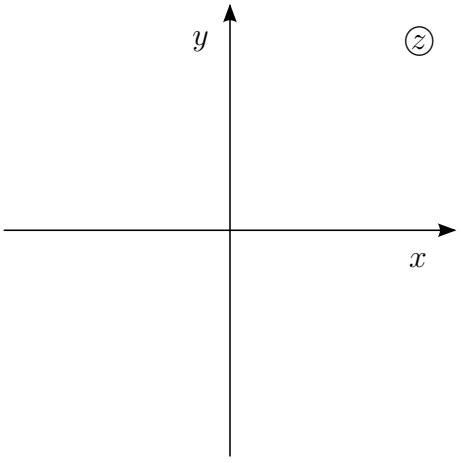
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ \arg(z) = \frac{\pi}{3}\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C} : \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



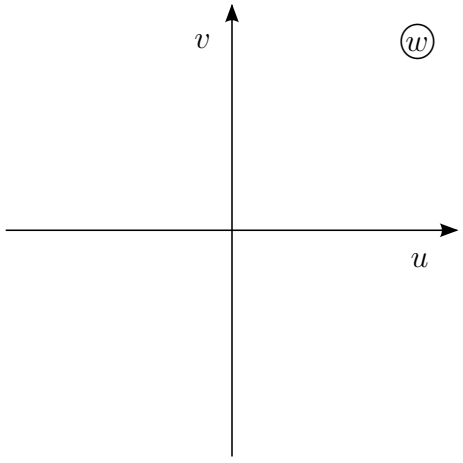
$$f : \ w = \frac{1}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{1}{w}$$



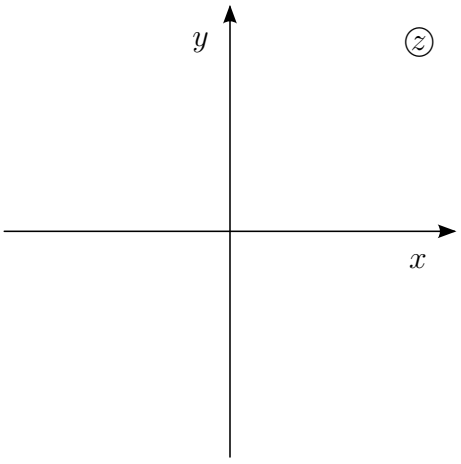
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C} : \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



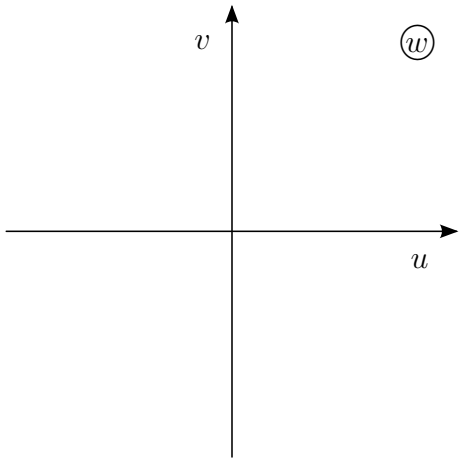
$$f : \ w = \frac{1}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{1}{w}$$



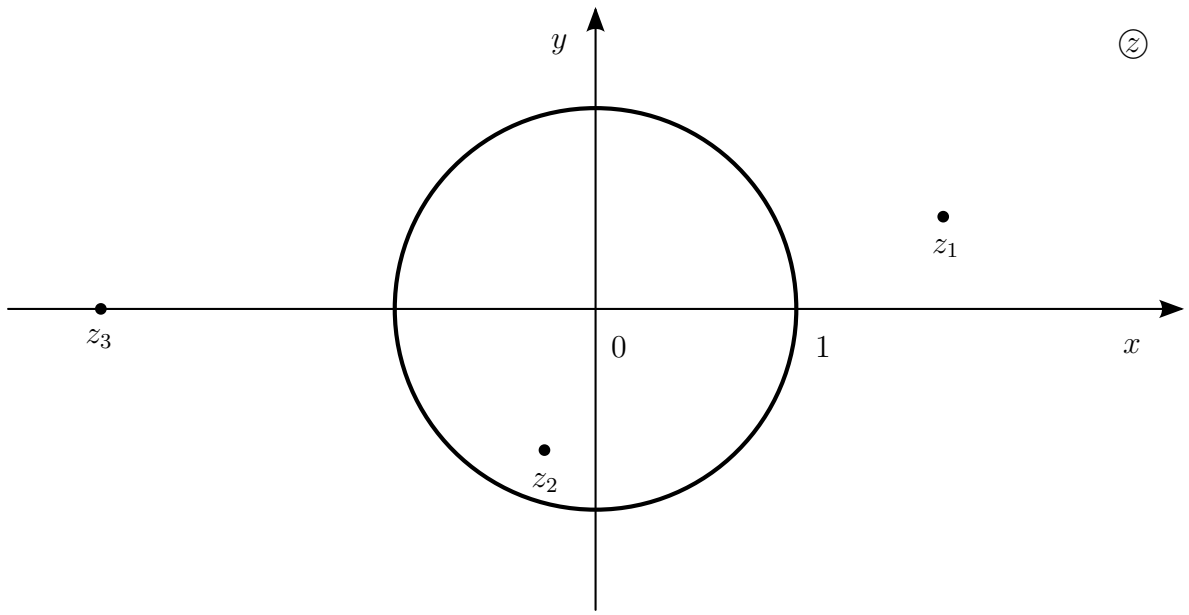
$M = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C} : \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



$$f : \ w = \frac{4}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{4}{w}$$



Příklad 4. (geometrická konstrukce převrácené hodnoty komplexního čísla)
Proveďte geometrickou konstrukci převrácených hodnot komplexních čísel z_1, z_2 a z_3.



Příklad 5. (kružnice)
Odvoďte analytické vyjádření kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $r > 0$:

$$|z - z_0| = r,$$

.....,
.....,
.....,
.....,
.....,

$$z\overline{z} - z\overline{z}_0 - z_0\overline{z} + |z_0|^2 = r^2.$$

Příklad 6. (přímka)
Odvoďte analytické vyjádření přímky, která je kolmá na přímku procházející body z_1 a z_2 (pro $z_1 \neq z_2$):

$$|z - z_1| = |z - z_2|,$$

.....,
.....,
.....,
.....,
.....,
.....,

$$z\overline{a} + \overline{z}a = c,$$

kde $a = z_2 - z_1$ a $c = |z_2|^2 - |z_1|^2$.

Příklad 7. (obraz kružnic procházející počátkem při kruhové inverzi)

Odvoďte obraz kružnice procházející počátkem ($|z_0| = r > 0$) při kruhové inverzi $w = f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$:

$$z\overline{z} - z\overline{z}_0 - z_0\overline{z} + |z_0|^2 = r^2,$$

. . . . . ,

. . . . . ,

. . . . . ,

. . . . . ,

. . . . . ,

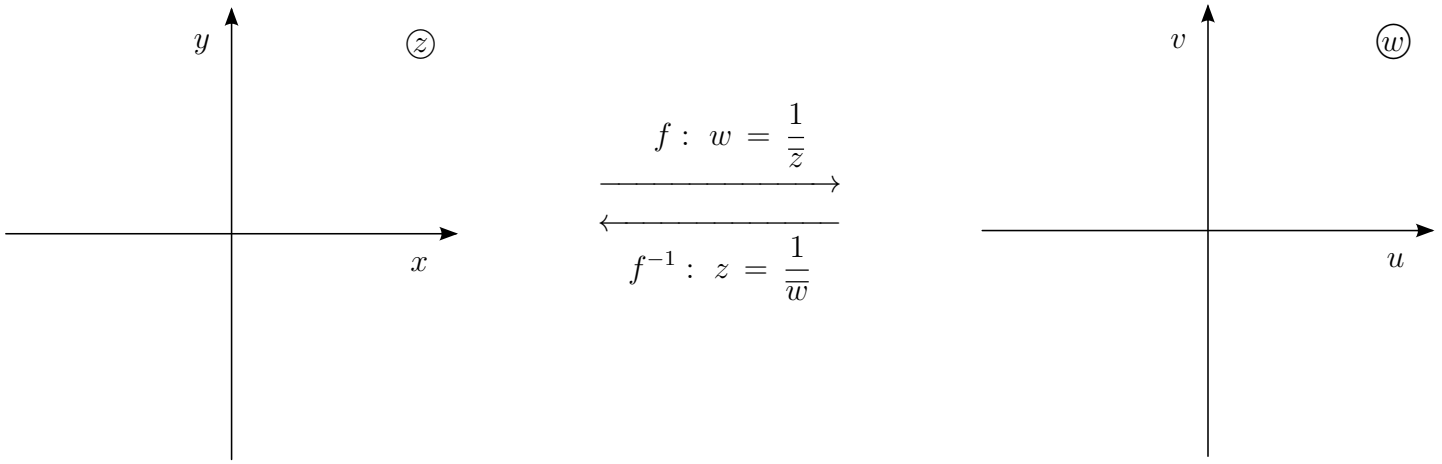
. . . . . ,

$$w\overline{a} + \overline{w}a = c,$$

kde $a =$ . . . . . a $c =$ . . . . . .

Dále určete a načrtněte obraz množiny M pomocí kruhové inverze.

$M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z - \frac{\mathrm{i}}{2}| = \frac{1}{2}\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}^* :$ . . . . . $\}$.



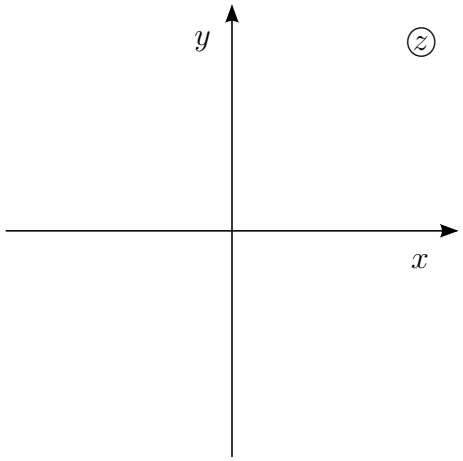
Příklad 8. (obraz zobecněné kružnice při kruhové inverzi)

Doplňte následující tabulku:

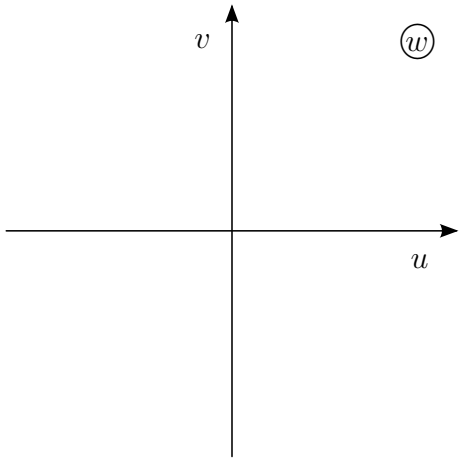
vzor	**obraz** při kruhové inverzi $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$
kružnice procházející počátkem	
přímka procházející počátkem	
přímka neprocházející počátkem	
kružnice neprocházející počátkem	

Příklad 9. (základní lineární lomená funkce)
Určete a načrtněte obraz množiny M pomocí základní lineární lomené funkce.

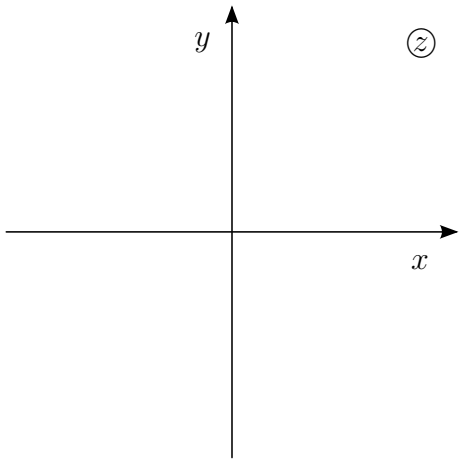
$M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z - \mathrm{i}| = 1\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}^* : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



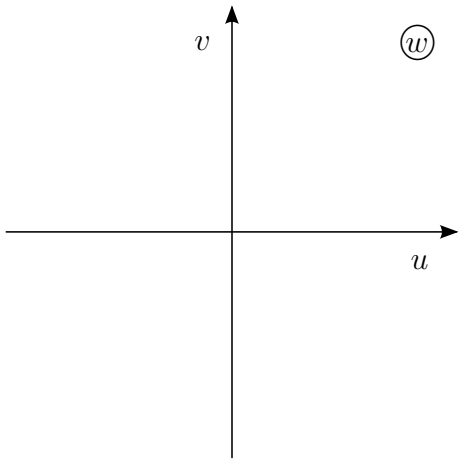
$$f : \ w = \frac{1}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{1}{w}$$



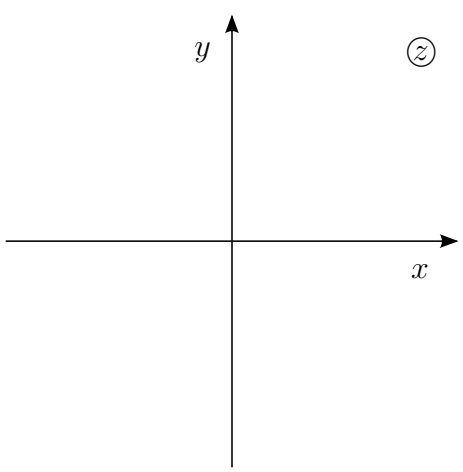
$M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z - 1| = |z + \mathrm{i}|\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}^* : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



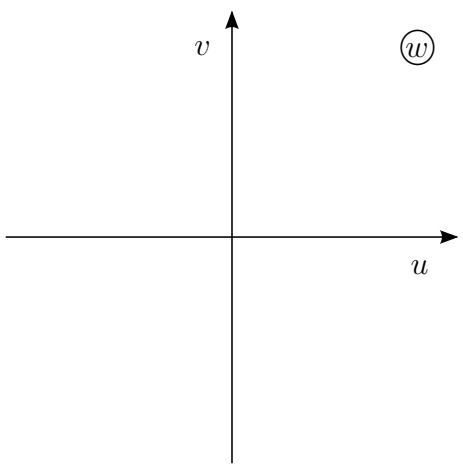
$$f : \ w = \frac{1}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{1}{w}$$



$M = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |z - 1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}\}$, $f(M) = \{w \in \mathbb{C}^* : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.



$$f : \ w = \frac{1}{z}$$
$$f^{-1} : \ z = \frac{1}{w}$$



Příklad 10. (lineární lomená funkce) Mějme lineární lomenou funkci

$$f(z) = \frac{z}{z-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Určete funkce f_1, f_2 a f_3 tak, aby

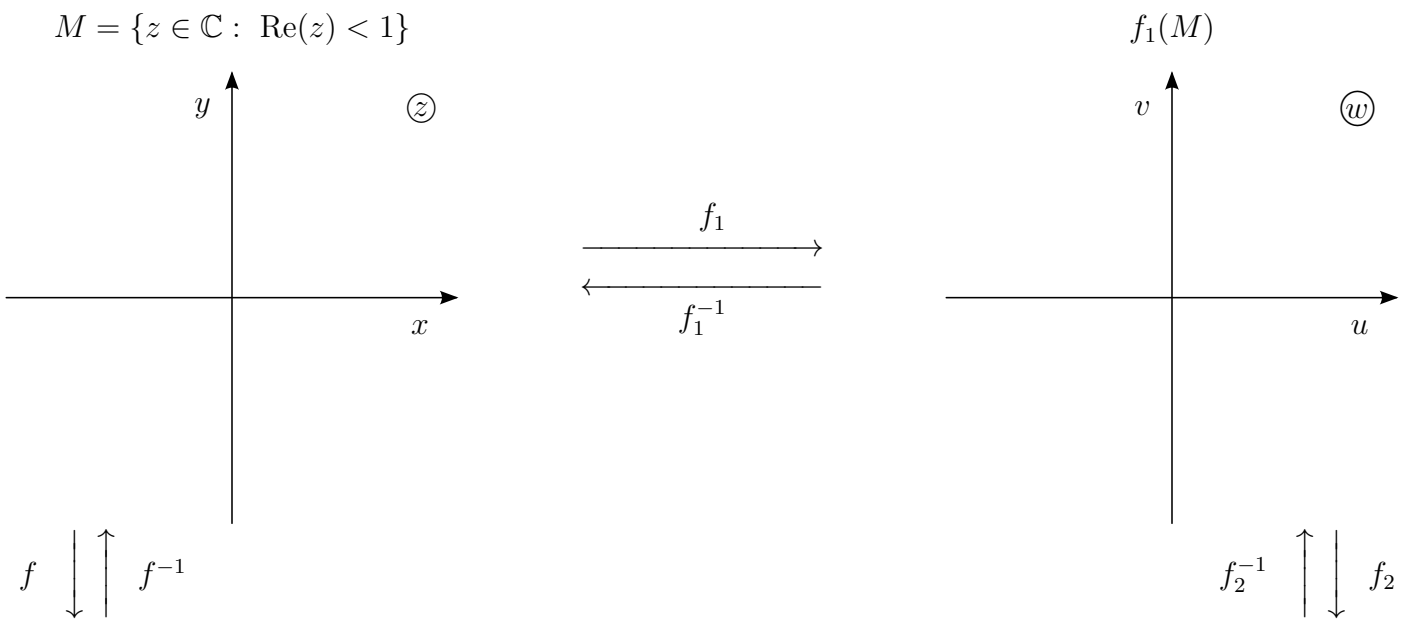
$$f(z) = f_3(f_2(f_1(z))), \qquad f^{-1}(w) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(w))),$$

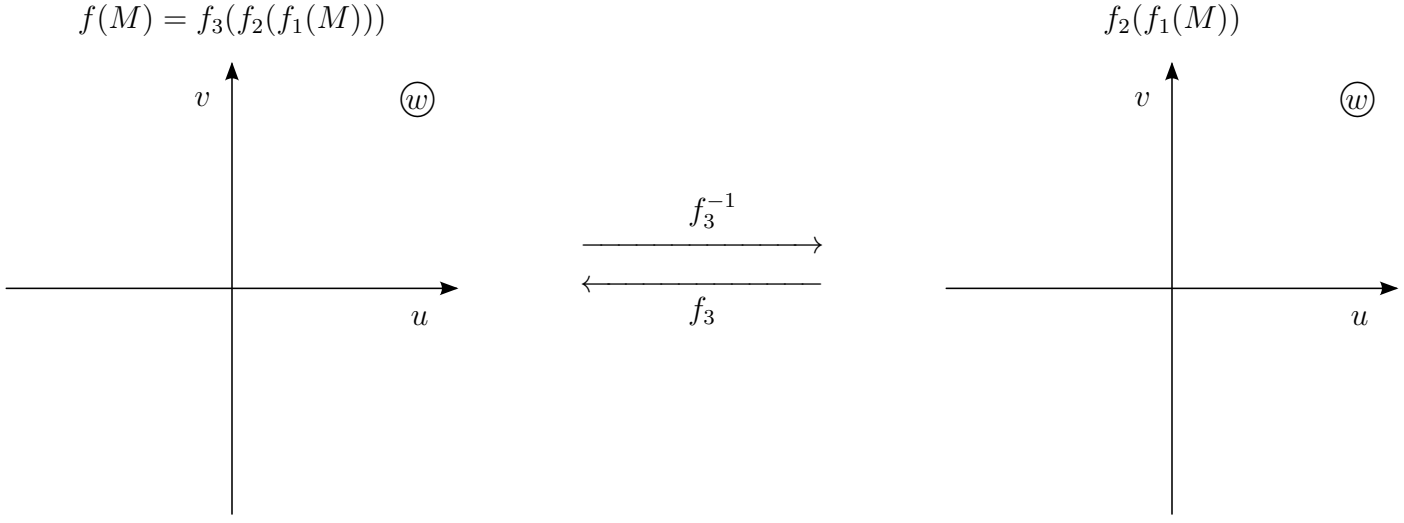
$$f_1(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_1^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_2(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_2^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_3(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_3^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Načrtněte obraz $f(M)$ množiny M.





Příklad 11. (lineární lomená funkce) Mějme lineární lomenou funkci

$$f(z) = \frac{z}{z-1+\mathrm{i}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Určete funkce f_1, f_2 a f_3 tak, aby

$$f(z) = f_3(f_2(f_1(z))), \qquad f^{-1}(w) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(w))),$$

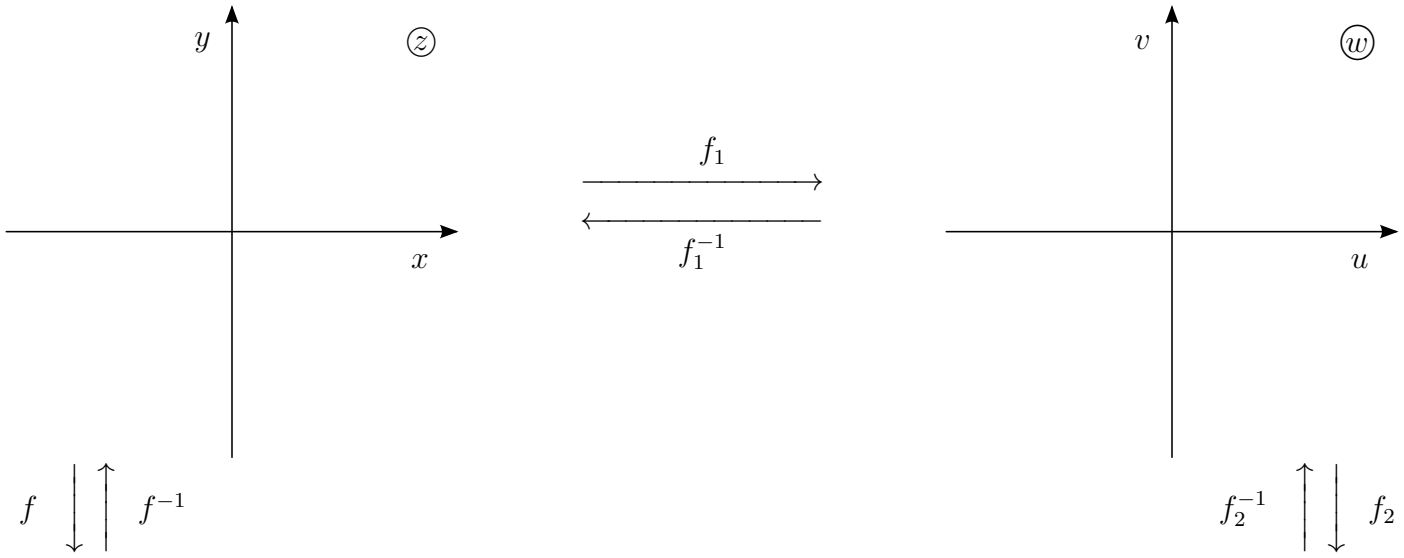
$$f_1(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_1^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_2(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_2^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

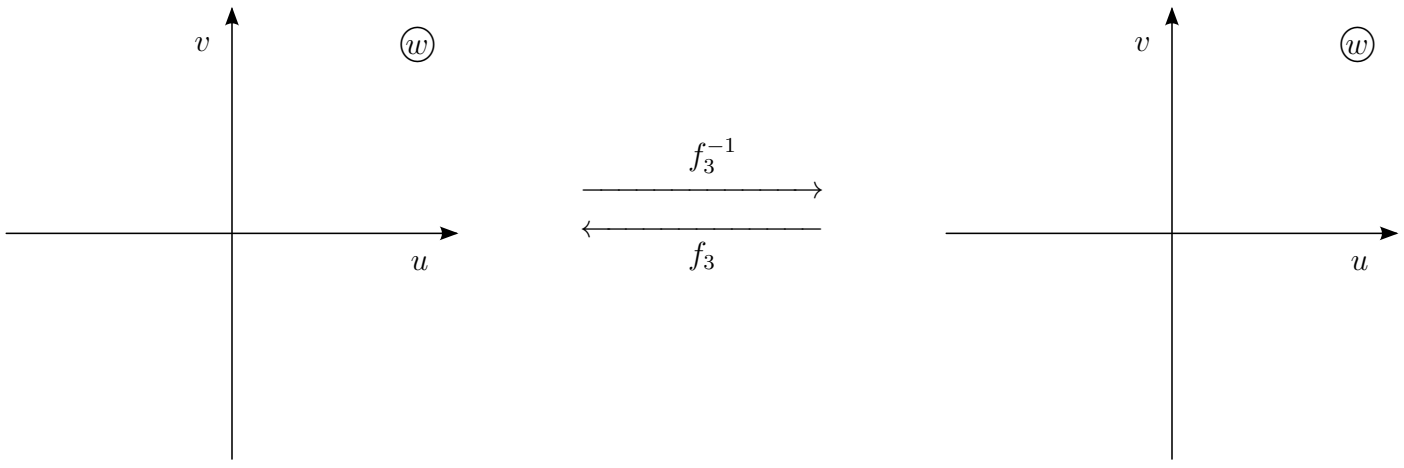
$$f_3(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_3^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Načrtněte obraz $f(M)$ množiny M.

$M = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(z) < 1,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ $\qquad$ $f_1(M)$



$f(M) = f_3(f_2(f_1(M)))$ $\qquad$ $f_2(f_1(M))$



Příklad 12. (lineární lomená funkce) Mějme lineární lomenou funkci

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Určete funkce f_1, f_2 a f_3 tak, aby

$$f(z) = f_3(f_2(f_1(z))), \qquad f^{-1}(w) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(w))),$$

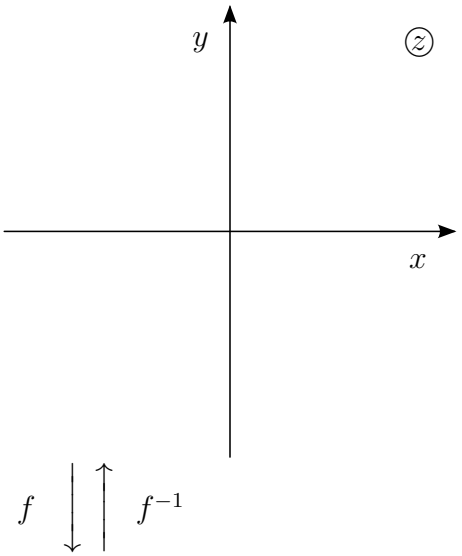
$$f_1(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_1^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_2(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_2^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

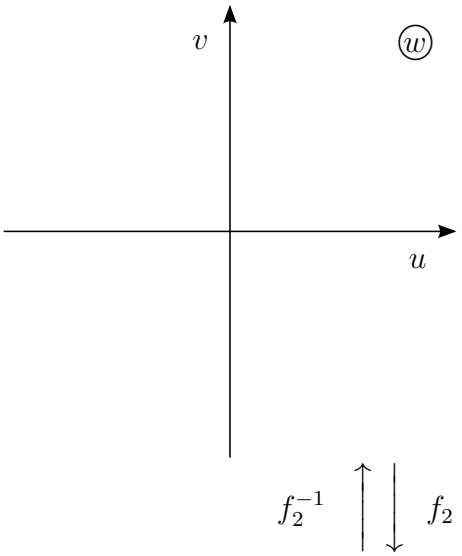
$$f_3(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f_3^{-1}(w) = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Načrtněte obraz $f(M)$ množiny M.

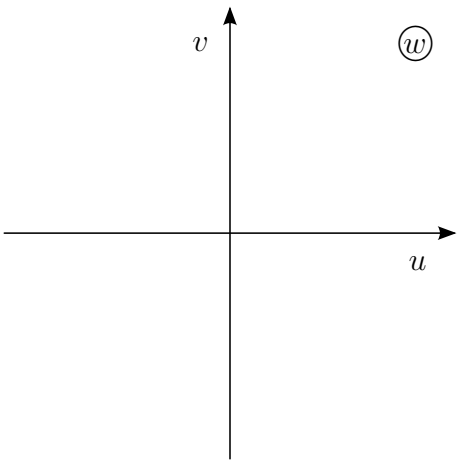
$M = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$



$f_1(M)$



$f(M) = f_3(f_2(f_1(M)))$



$f_2(f_1(M))$