Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (transformace pomocí převrácené hodnoty)
Nejprve upravme

$$w = \frac{1}{z}, \qquad z = \frac{1}{w},$$

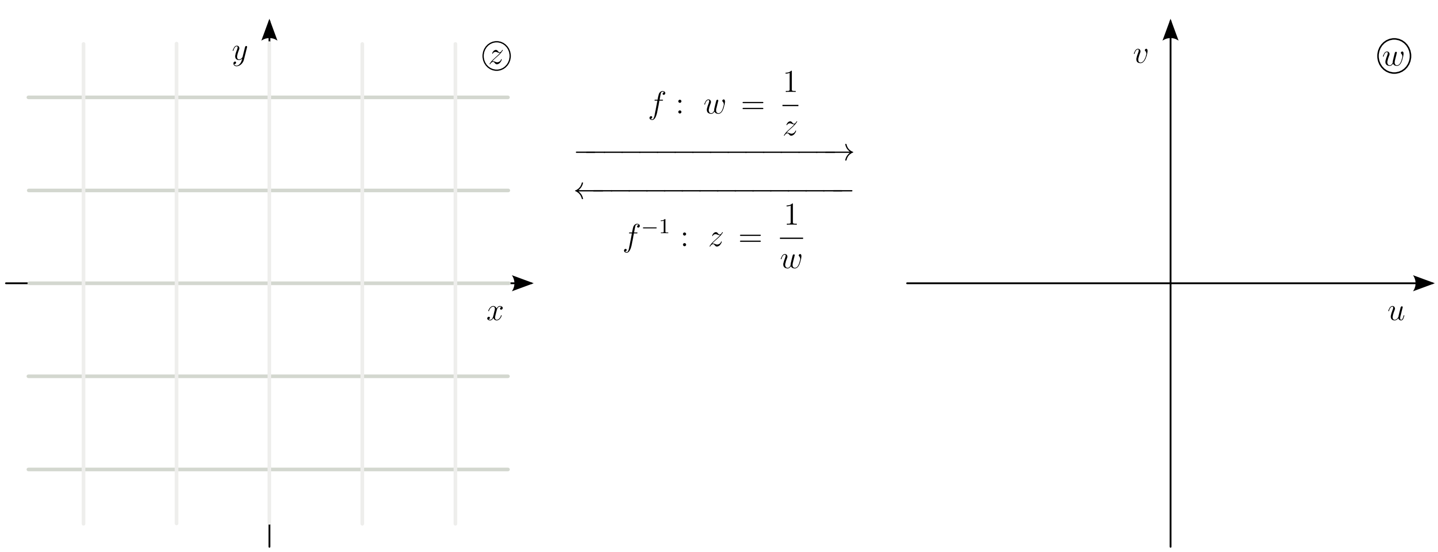
$$\begin{aligned} x + \mathrm{i}\,y &= \frac{1}{u+\mathrm{i}\,v}\dots\dots\dots\dots, \\ x + \mathrm{i}\,y &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x + \mathrm{i}\,y &= \dots\dots\dots\dots + \mathrm{i}\,\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(u - \frac{1}{2x}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x}\right)^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots. \end{cases}$$

Určete a načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce převrácená hodnota $f : w = \dfrac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = 0\}, & f(A_0) &= \{w \in \mathbb{C} :\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\} \cup \{\dots\dots\}, \\ B_0 &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = 0\}, & f(B_0) &= \{w \in \mathbb{C} :\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\} \cup \{\dots\dots\}, \\ A_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = n\}, & f(A_n) &= \{w \in \mathbb{C} :\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = n\}, & f(B_n) &= \{w \in \mathbb{C} :\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}, \\ & n = -2, -1, 1, 2, & & n = -2, -1, 1, 2. \end{aligned}$$

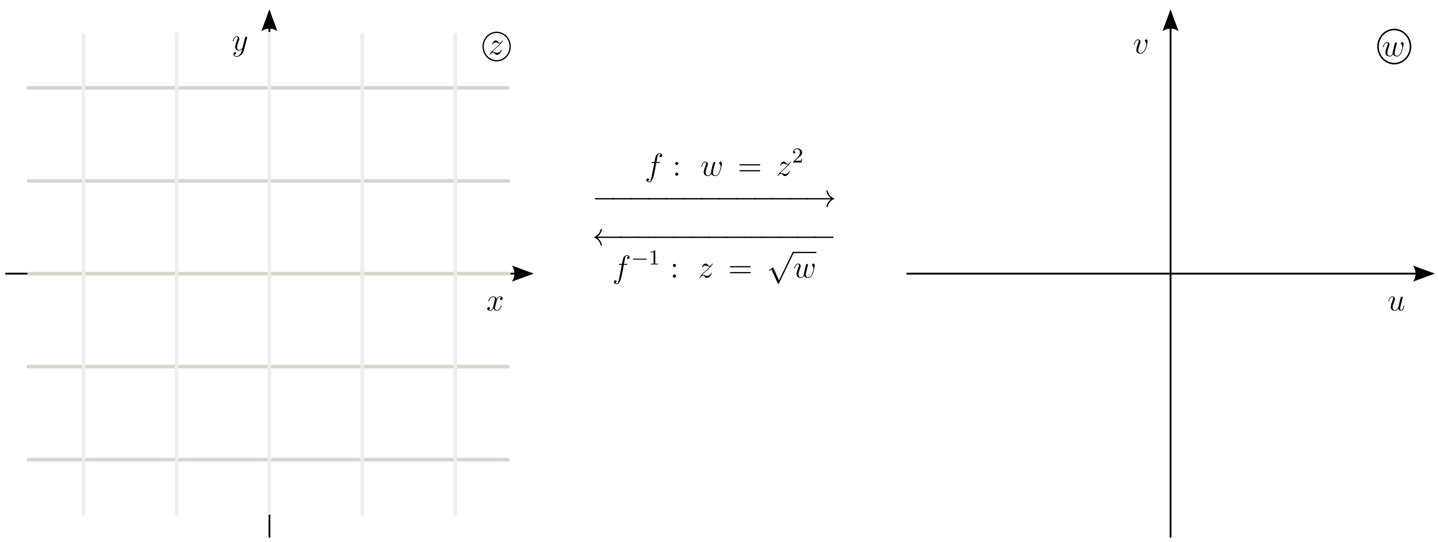


Příklad 2. (transformace pomocí druhé mocniny a odmocniny)
Nejprve upravme

$$\begin{aligned} w &= z^2, \\ u + \mathrm{i}\, v &= (x + \mathrm{i}\, y)^2, \\ u + \mathrm{i}\, v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{cases} u = \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v = \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases}$$

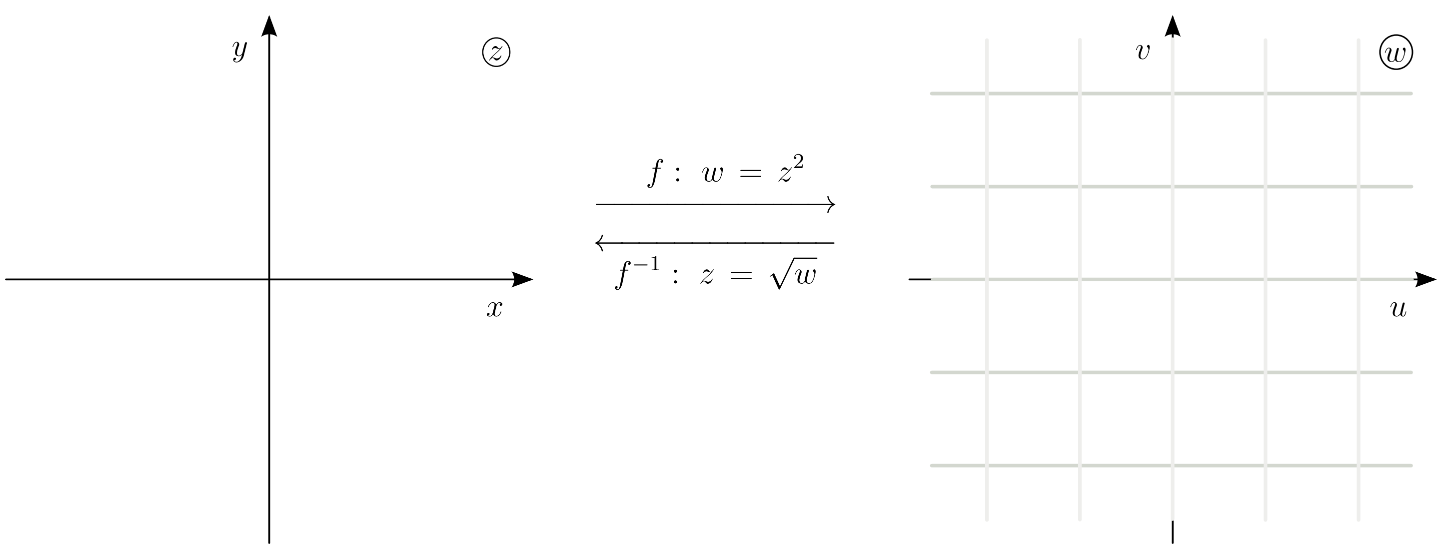
Určete a načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce druhá mocnina $f : w = z^2$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = 0\}, & f(A_0) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, \\ B_0 &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = 0\}, & f(B_0) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, \\ A_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ |x| = n\}, & f(A_n) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ |y| = n\},\ n = 1, 2, & f(B_n) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\},\ n = 1, 2. \end{aligned}$$



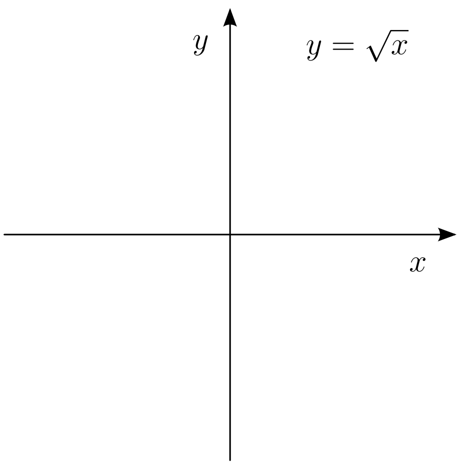
Určete a načrtněte obrazy množin C_n a D_n zobrazené pomocí funkce druhá odmocnina $f^{-1} : z = \sqrt{w}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C_0) &= \{z \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, & C_0 &= \{w \in \mathbb{C} :\ u = 0\}, \\ f^{-1}(D_0) &= \{z \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, & D_0 &= \{w \in \mathbb{C} :\ v = 0\}, \\ f^{-1}(C_n) &= \{z \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\}, & C_n &= \{w \in \mathbb{C} :\ |u| = n\}, \\ f^{-1}(D_n) &= \{z \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\},\ n = 1, 2. & D_n &= \{w \in \mathbb{C} :\ |v| = n\},\ n = 1, 2. \end{aligned}$$

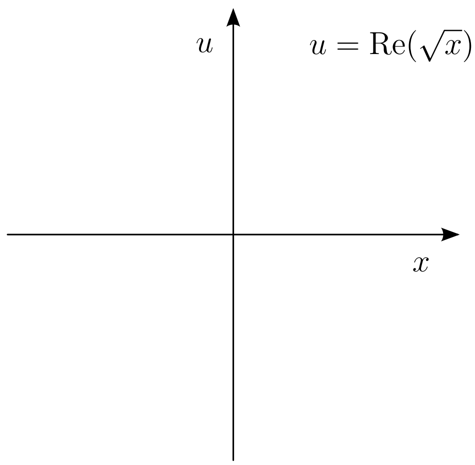


Příklad 3. (grafy reálných a komplexních odmocnin jedné reálné proměnné)
Načrtněte grafy následujících funkcí jedné reálné proměnné:

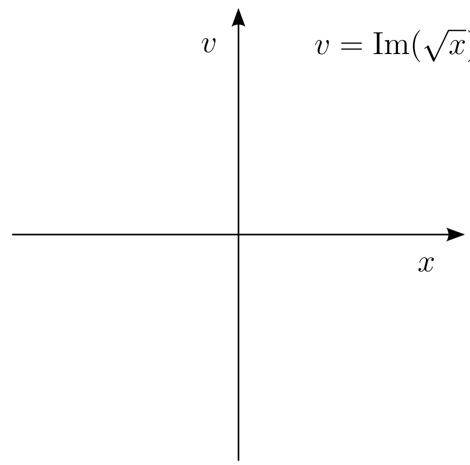
graf reálné druhé odmocniny



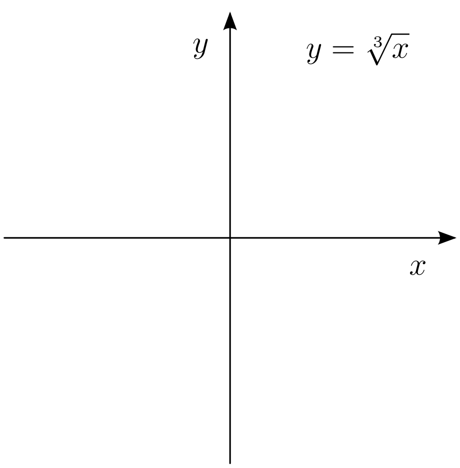
graf reálné části komplexní druhé odmocniny



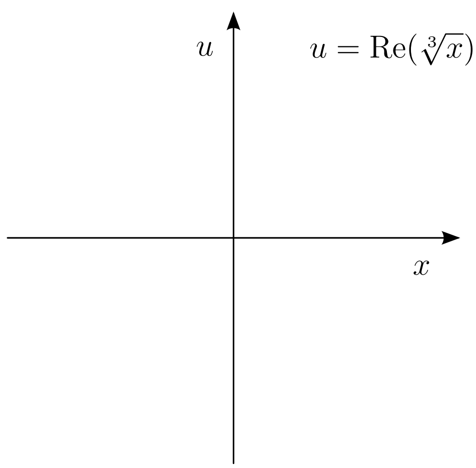
graf imaginární části komplexní druhé odmocniny



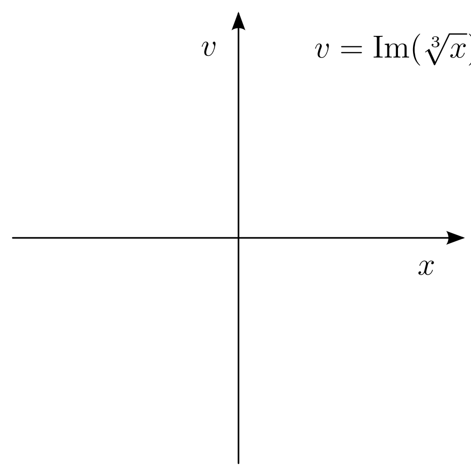
graf reálné třetí odmocniny



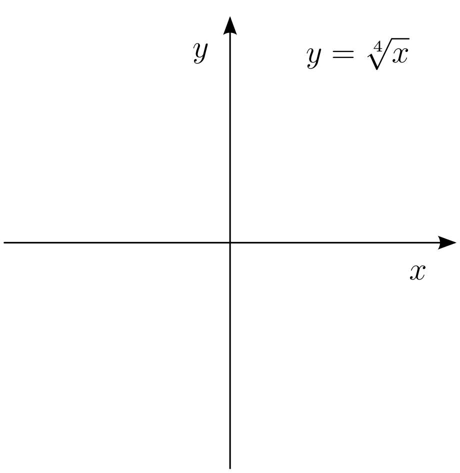
graf reálné části komplexní třetí odmocniny



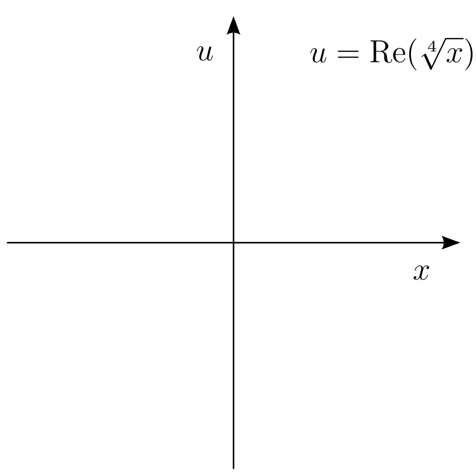
graf imaginární části komplexní třetí odmocniny



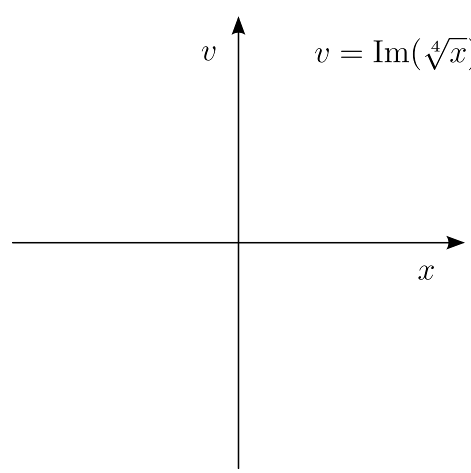
graf reálné čtvrté odmocniny



graf reálné části komplexní čtvrté odmocniny



graf imaginární části komplexní čtvrté odmocniny



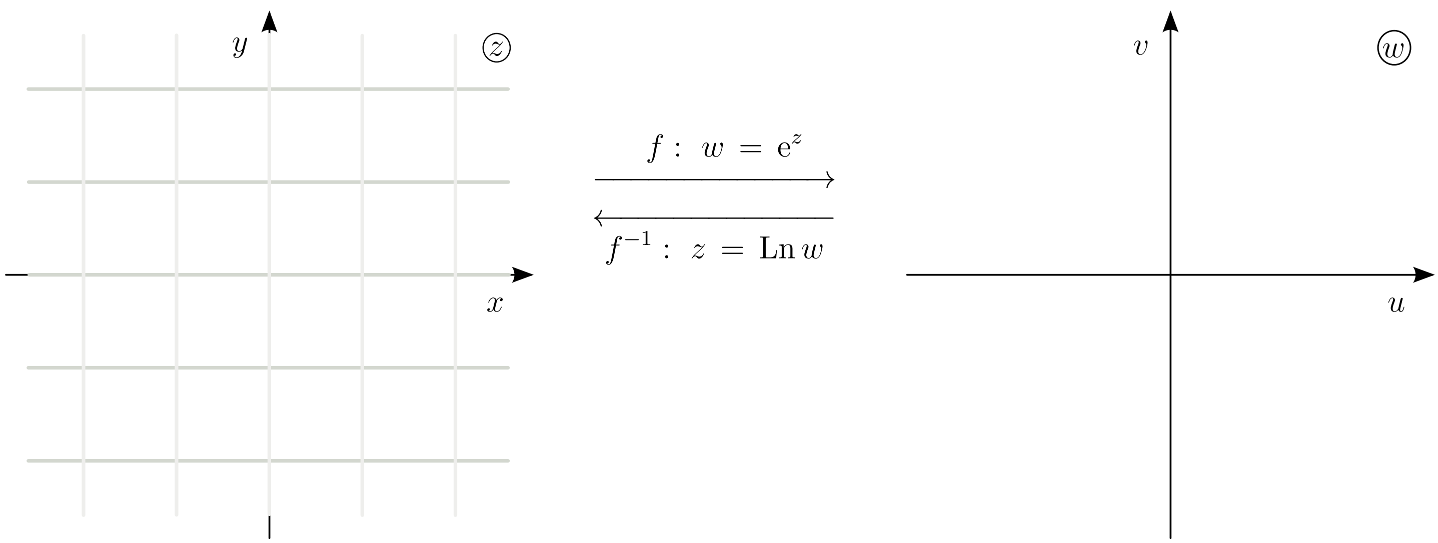
Příklad 4. (transformace pomocí exponenciální funkce a logaritmu)
Nejprve upravme

$$\begin{aligned} w &= \mathrm{e}^{z}, \\ u + \mathrm{i}\,v &= \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y}, \\ u + \mathrm{i}\,v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{aligned} \right.$$

Určete a načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí exponenciální funkce $f : w = \mathrm{e}^{z}$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = n\}, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = n\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(A_n) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}, \\ f(B_n) &= \{w \in \mathbb{C} : \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}, \end{aligned}$$

$$n = -2, -1, 0, 1, 2, \qquad\qquad n = -2, -1, 0, 1, 2.$$



Příklad 5. (reálná a imaginární část logaritmu a exponenciální funkce)
Pro každé $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ platí

$$w = |w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w} = \mathrm{e}^{\ln|w|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w} = \mathrm{e}^{\ln|w| + \mathrm{i}\arg w}.$$

1. Určete všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí $\mathrm{e}^{z} = w = \mathrm{e}^{\ln|w| + \mathrm{i}\arg w}$:

$$\begin{aligned} z &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \mathrm{Ln}\, w. \end{aligned}$$

2. Vyjádřete v algebraickém tvaru:

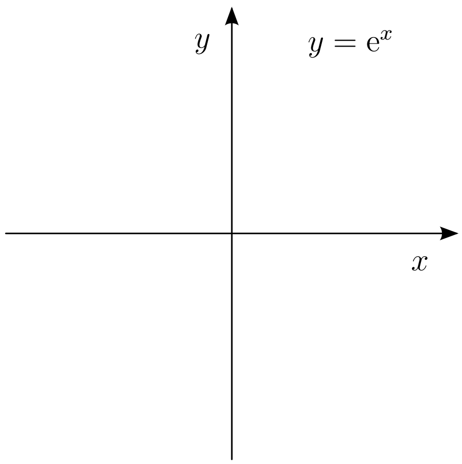
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} &= \dots\dots\dots, & \mathrm{Ln}\,1 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \ln 1 &= \dots\dots\dots, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}} &= \dots\dots\dots, & \mathrm{Ln}(-1) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \ln(-1) &= \dots\dots\dots, \\ \mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\,\pi} &= \dots\dots\dots, & \mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \ln(1+\mathrm{i}) &= \dots\dots\dots. \end{aligned}$$

3. Ukažte, že $\forall z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{e}^{z} \neq 0$: ……………………………………………………………………,
…….

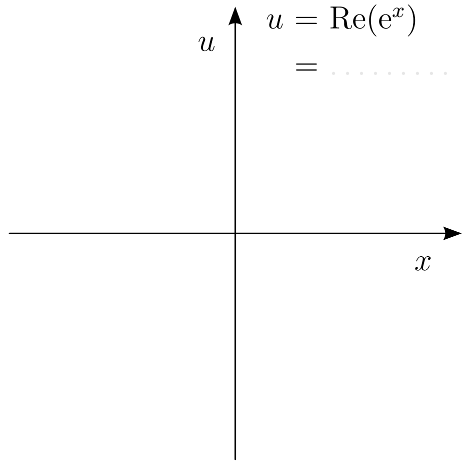
4. Doplňte: $\quad \forall w \in \mathbb{C} : \quad (\ \ln w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \dots\dots\dots\dots\ ).$

Příklad 6. (graf exponenciální funkce reálné a ryze imaginární proměnné)
Načrtněte grafy následujících funkcí jedné proměnné:

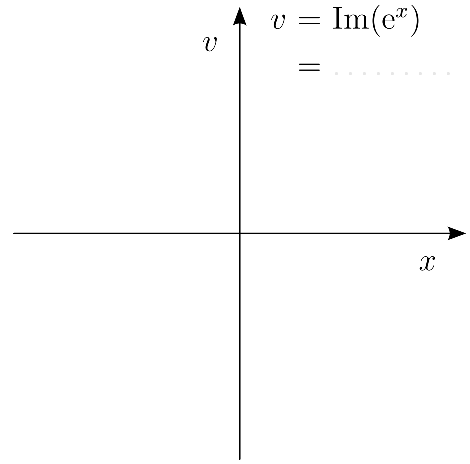
graf reálné exponenciální funkce



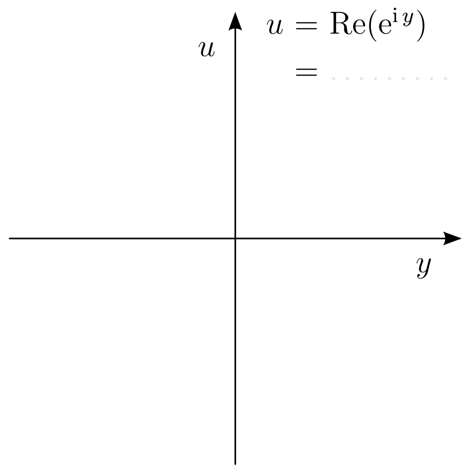
graf reálné části exp. fce reálné prom.



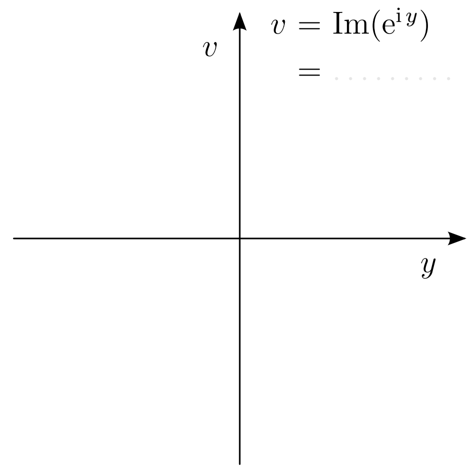
graf imaginární části exp. fce reálné prom.



graf reálné části exp. fce ryze imaginární prom.



graf imaginární části exp. fce ryze imaginární prom.



Příklad 7. (řešení rovnice)

1. Vyjádřete v algebraickém tvaru: $\mathrm{Ln}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$
2. Najděte všechna řešení rovnice $\mathrm{e}^{z^2} = 1$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

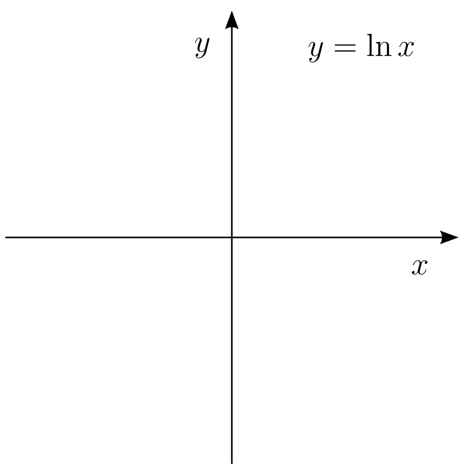
. . . .

. . . .

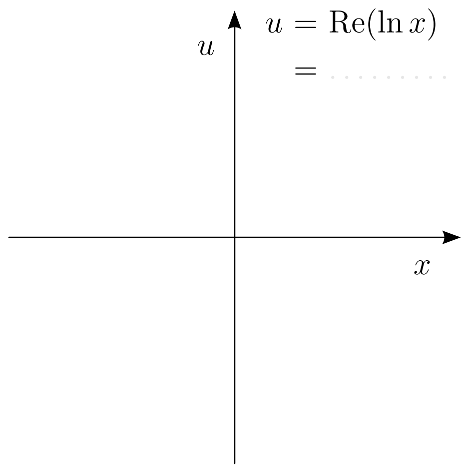
. . . .

Příklad 8. (graf hlavní části logaritmu reálné a ryze imaginární proměnné)
Načrtněte grafy následujících funkcí jedné proměnné:

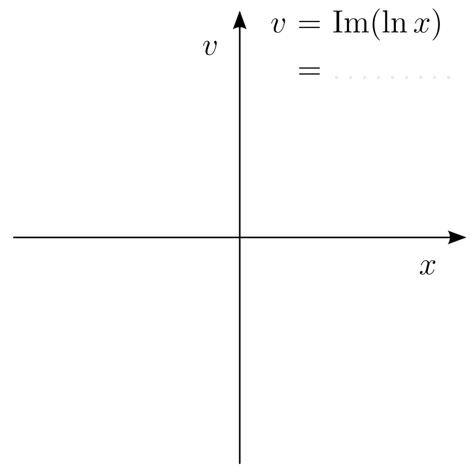
graf reálného logaritmu



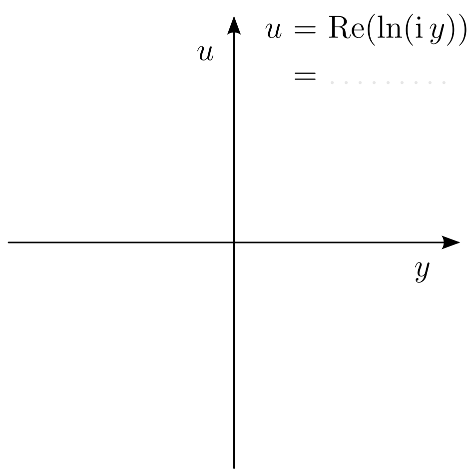
graf reálné části logaritmu reálné prom.



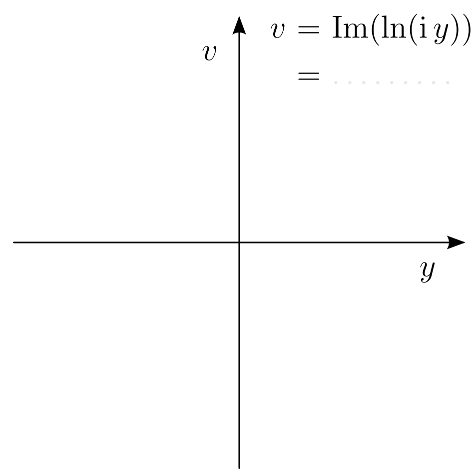
graf imaginární části logaritmu reálné prom.



graf reálné části logaritmu ryze imag. prom.



graf imaginární části logaritmu ryze imag. prom.



Příklad 9. (obecná mocninná a obecná exponenciální funkce)
Vyjádřete v algebraickém tvaru:

1. $1^{\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$,

2. $(-2)^{-\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$,

3. $\pi^{\mathrm{i}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$,

4. $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$,

5. $(1+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.