Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (základní vlastnosti funkce sinus)
S využitím vztahu $\sin z = \sin(x + \mathrm{i}\,y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y$ upravte

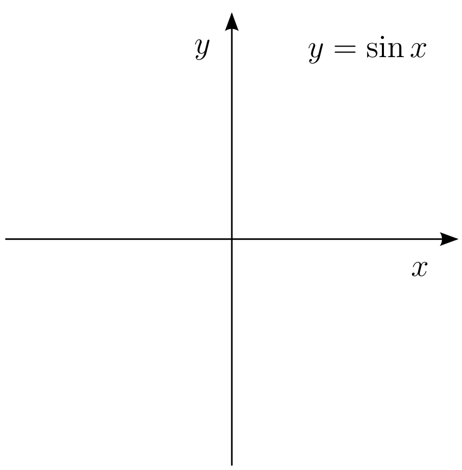
$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

1. Víme, že pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \le 1$. Najděte alespoň jedno komplexní číslo $z =$ ...., pro které platí $|\sin z| > 1$.
2. Ukažte, že $\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

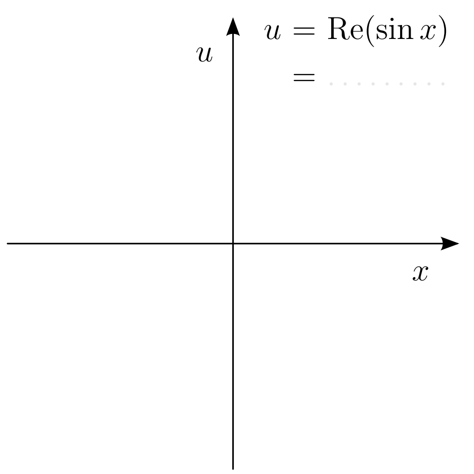
   ....
3. Určete $\max\limits_{|z| \le 1} |\sin z| =$ ....
   Dále určete všechna komplexní čísla z s $|z| \le 1$, ve kterých se tohoto maxima nabývá: ....

Příklad 2. (graf funkce sinus reálné a ryze imaginární proměnné)
Načrtněte grafy následujících funkcí jedné proměnné:

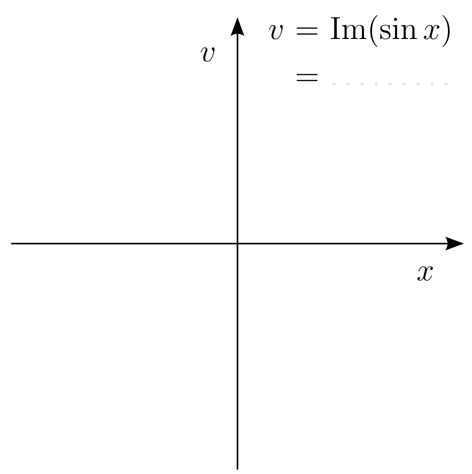
graf reálné funkce sinus



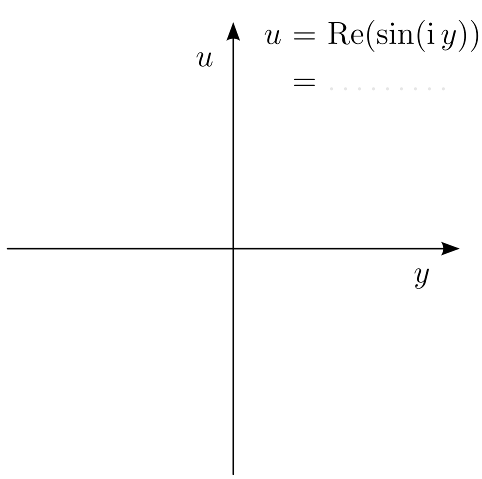
graf reálné části funkce sinus reálné prom.



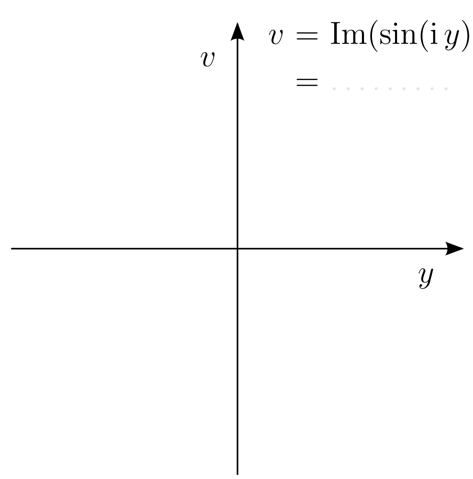
graf imaginární části funkce sinus reálné prom.



graf reálné části funkce sinus ryze imag. prom.



graf imag. části funkce sinus ryze imag. prom.



Příklad 3. (základní vlastnosti funkce kosinus)
S využitím vztahu $\cos z = \cos(x + \mathrm{i}\, y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y$ upravte

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \cos^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

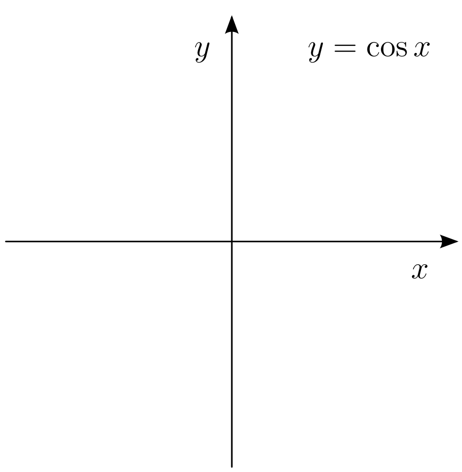
1. Víme, že pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R}$ platí $|\cos x| \leq 1$. Najděte alespoň jedno komplexní číslo $z = \dots\dots\dots\dots$, pro které platí $|\cos z| > 1$.

2. Ukažte, že
$$\cos z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$
....,
....

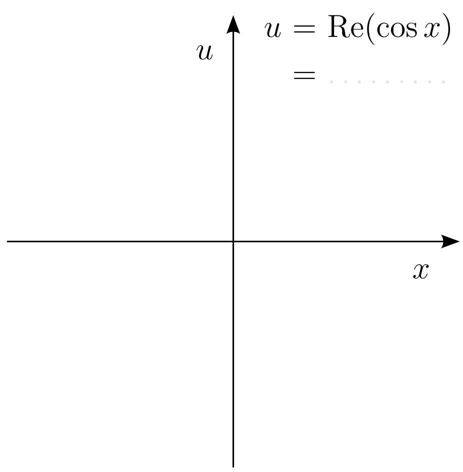
3. Určete $\max\limits_{|z| \leq 1} |\cos z| = \dots\dots\dots\dots$.
Dále určete všechna komplexní čísla z s $|z| \leq 1$, ve kterých se tohoto maxima nabývá: ....

Příklad 4. (graf funkce kosinus reálné a ryze imaginární proměnné)
Načrtněte grafy následujících funkcí jedné proměnné:

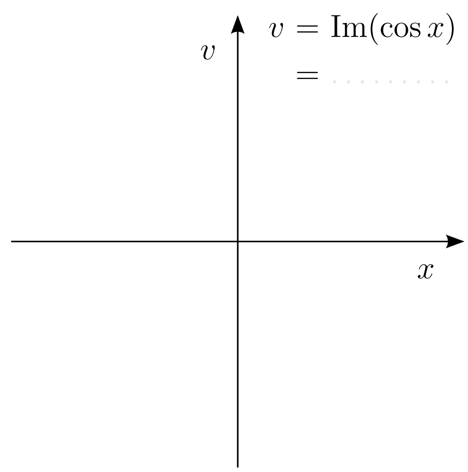
graf reálné funkce kosinus



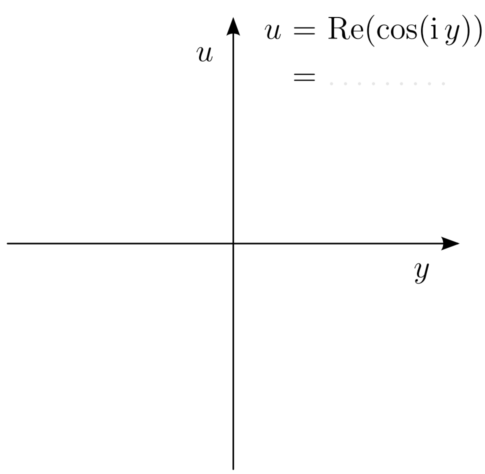
graf reálné části funkce kosinus reálné prom.



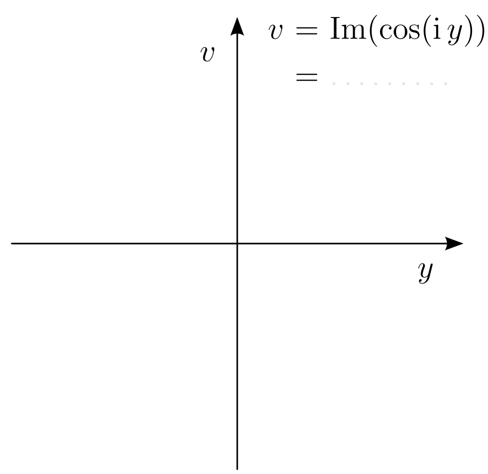
graf imaginární části funkce kosinus reálné prom.



graf reálné části funkce kosinus ryze imag. prom.



graf imag. části funkce kosinus ryze imag. prom.



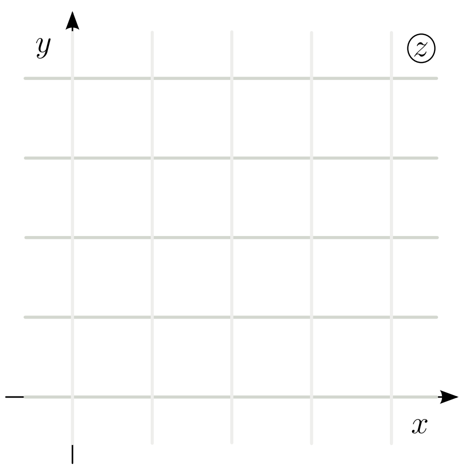
Příklad 5. (transformace pomocí funkce sinus a kosinus)

Nejprve upravme

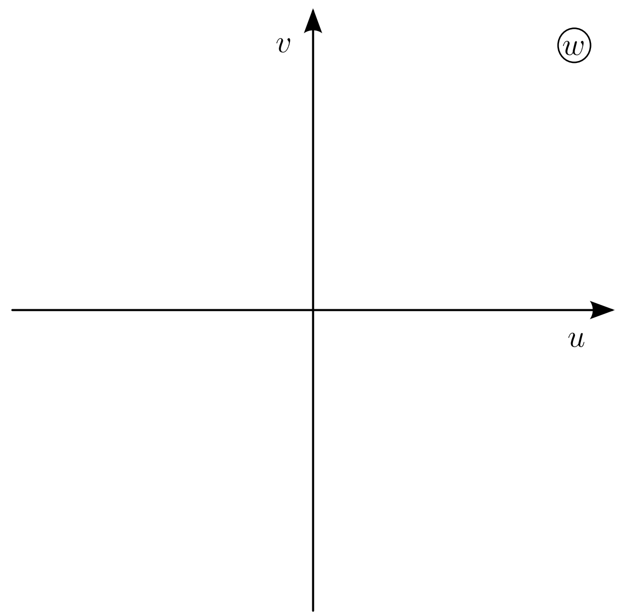
$$\begin{aligned} w &= \sin z = \sin(x+\mathrm{i}\,y), \\ u+\mathrm{i}\,v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\begin{cases} u = \dots\dots\dots\dots\dots, \\ v = \dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w &= \cos z = \cos(x+\mathrm{i}\,y), \\ u+\mathrm{i}\,v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\begin{cases} u = \dots\dots\dots\dots\dots, \\ v = \dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases} \end{aligned}$$

Načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce sinus $f: w = \sin z$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{z \in \mathbb{C}:\ x = n\tfrac{\pi}{4}\}, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C}:\ y = n\tfrac{\pi}{4}\}, \\ & n = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

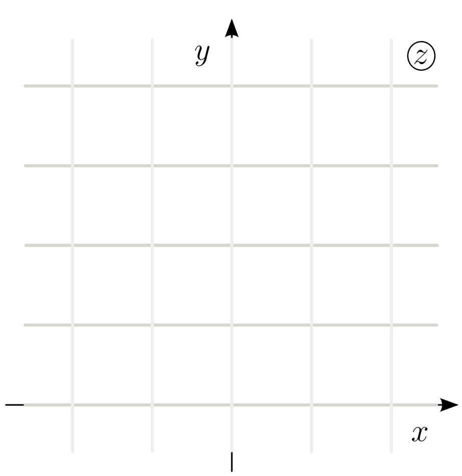


$$\underset{f^{-1}:\ z\ =\ \mathrm{Arcsin}\, w}{\overset{f:\ w\ =\ \sin z}{\rightleftarrows}}$$

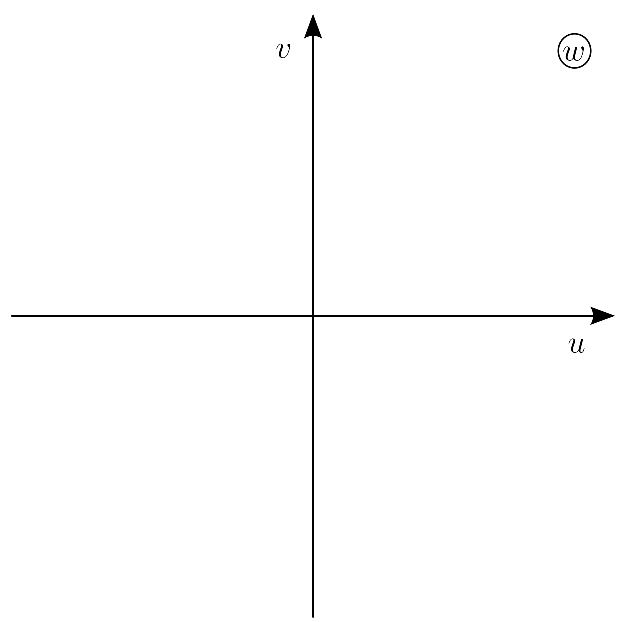


Načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce kosinus $f: w = \cos z$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{z \in \mathbb{C}:\ x = n\tfrac{\pi}{4}\}, \quad n = -2, \dots, 2, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C}:\ y = n\tfrac{\pi}{4}\}, \quad n = 0, \dots, 4. \end{aligned}$$



$$\underset{f^{-1}:\ z\ =\ \mathrm{Arccos}\, w}{\overset{f:\ w\ =\ \cos z}{\rightleftarrows}}$$



Příklad 6. (vztahy mezi goniometrickými a hyperbolickými funkcemi)
S využitím definic jednotlivých funkcí doplňte chybějící úpravy:

$\sin(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \mathrm{i}\sinh z,$

$\sinh(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \mathrm{i}\sin z,$

$\cos(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \cosh z,$

$\cosh(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \cos z,$

$\operatorname{tg}(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \mathrm{i}\operatorname{tgh} z,$

$\operatorname{tgh}(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = \mathrm{i}\operatorname{tg} z,$

$\operatorname{cotg}(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = -\mathrm{i}\operatorname{cotgh} z,$

$\operatorname{cotgh}(\mathrm{i}\,z) = \dots\dots\dots\dots = -\mathrm{i}\operatorname{cotg} z.$

S využitím součtových vzorců

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \qquad \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \qquad \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2,$$

doplňte chybějící úpravy:

$\overline{\sin z} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \sin \overline{z},$

$\overline{\sinh z} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \sinh \overline{z},$

$\overline{\cos z} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \cos \overline{z},$

$\overline{\cosh z} = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \cosh \overline{z}.$

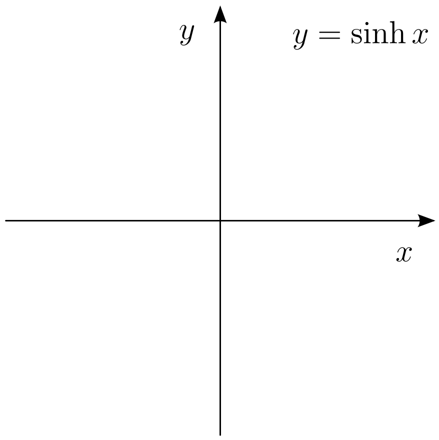
Zjednodušte $\cos z \cos \overline{z} + \sin z \sin \overline{z} = \dots\dots\dots\dots$

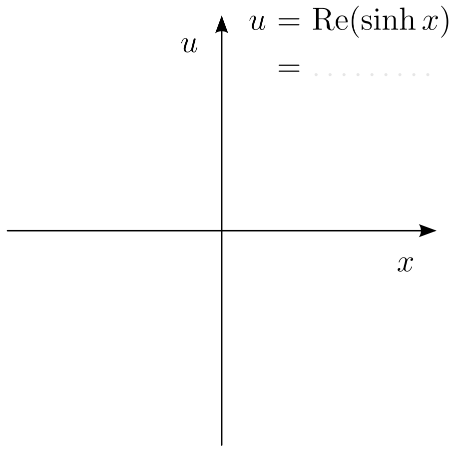
$\dots\dots\dots\dots$

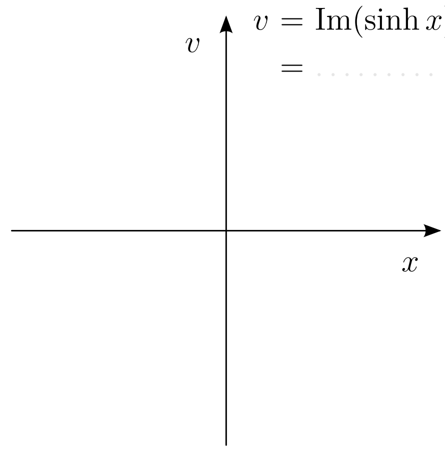
$\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots$

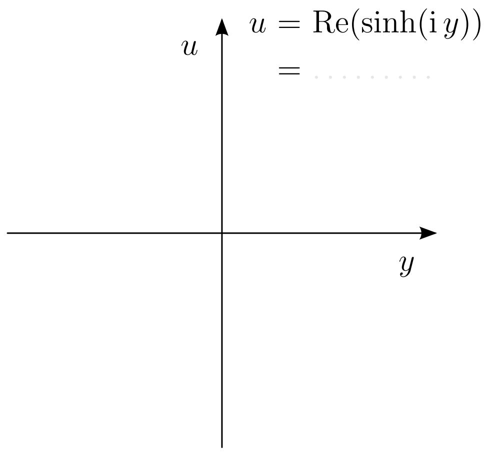
Příklad 7. (graf funkce hyperbolický sinus a kosinus) Načrtněte grafy následujících funkcí:

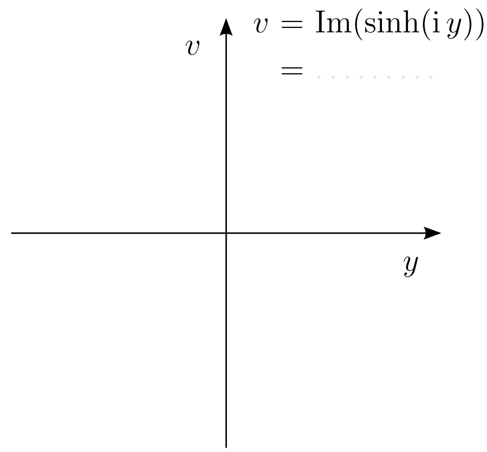


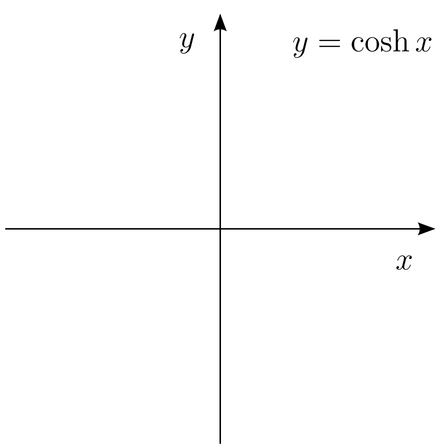


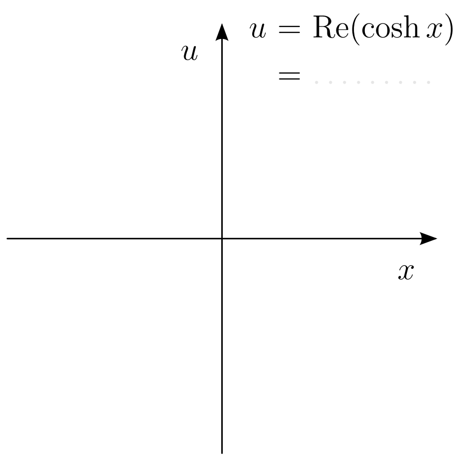


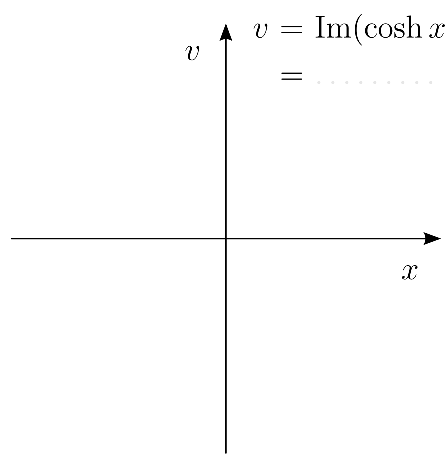
reálná funkce hyperbolický sinus



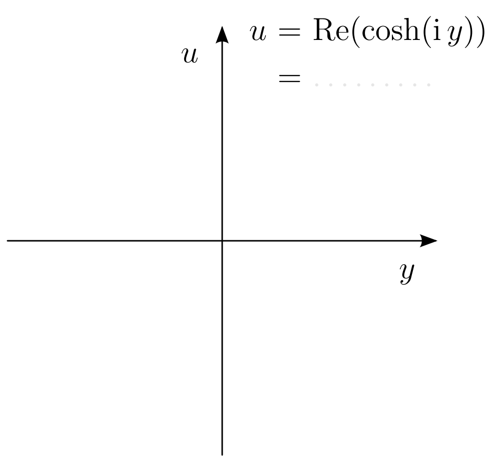


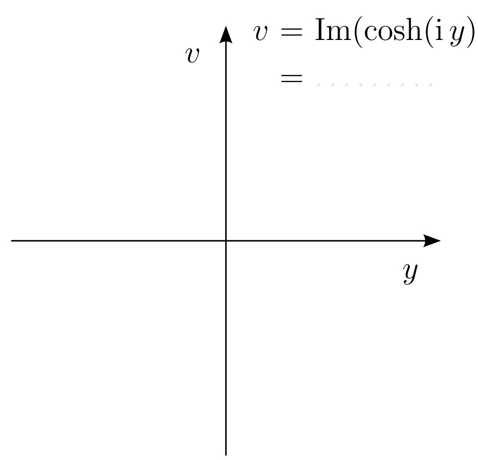






reálná funkce hyperbolický kosinus



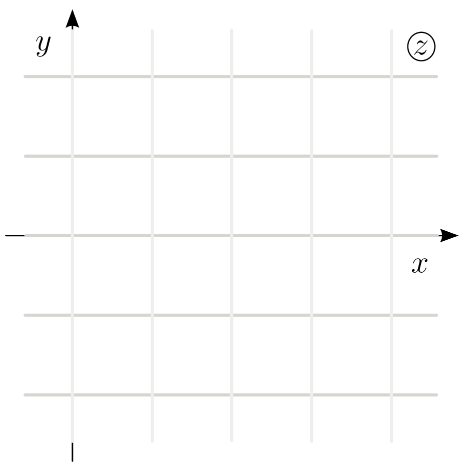


Příklad 8. (transformace pomocí funkce hyperbolický sinus a kosinus)
Nejprve upravme

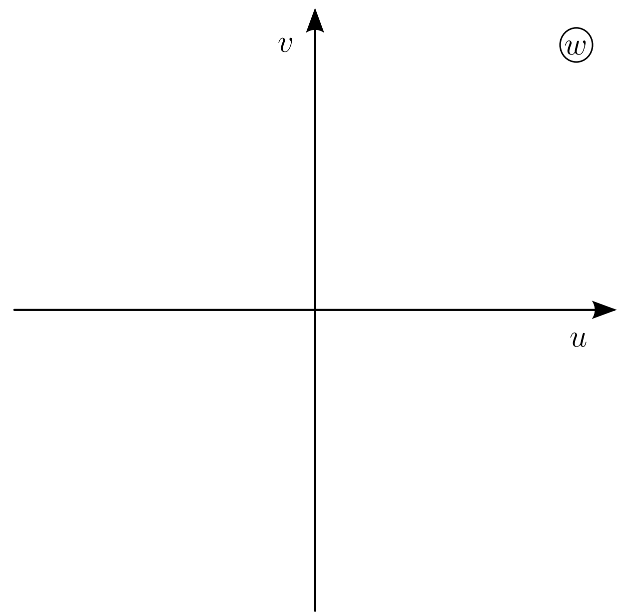
$$\begin{aligned} w &= \sinh z = \sinh(x + \mathrm{i}\, y), \\ u + \mathrm{i}\, v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \begin{cases} u &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w &= \cosh z = \cosh(x + \mathrm{i}\, y), \\ u + \mathrm{i}\, v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \begin{cases} u &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases} \end{aligned}$$

Určete a načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce hyperbolický sinus $f : w = \sinh z$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = n\tfrac{\pi}{4}\}, \quad n = 0, \dots, 4, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = n\tfrac{\pi}{4}\}, \quad n = -2, \dots, 2, \end{aligned}$$

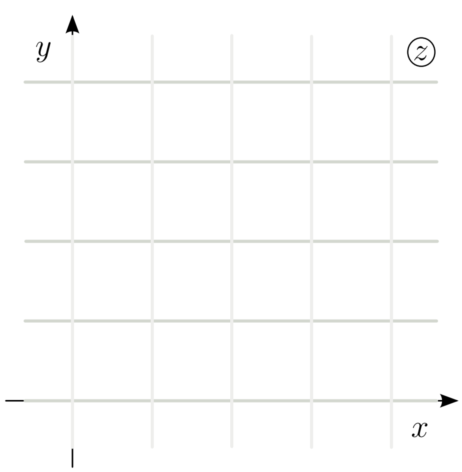


$$\xrightarrow{f\,:\ w\ =\ \sinh z} \qquad \xleftarrow[f^{-1}\,:\ z\ =\ \operatorname{Argsinh} w]{}$$

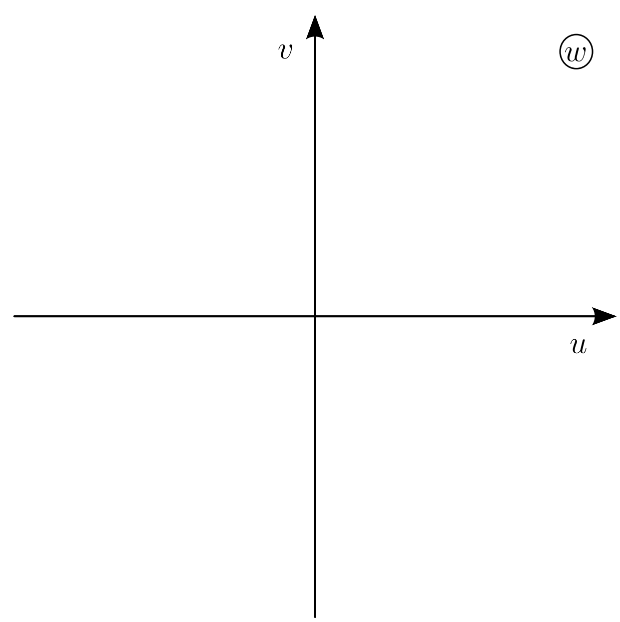


Určete a načrtněte obrazy množin A_n a B_n zobrazené pomocí funkce hyperbolický kosinus $f : w = \cosh z$:

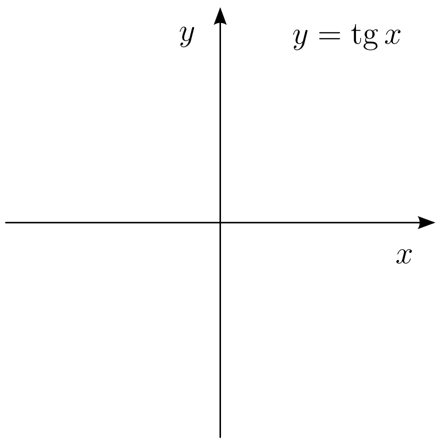
$$\begin{aligned} A_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ x = n\tfrac{\pi}{4}\}, \\ B_n &= \{z \in \mathbb{C} :\ y = n\tfrac{\pi}{4}\}, \\ & \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

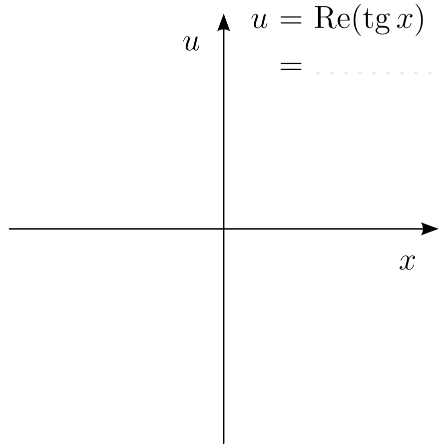


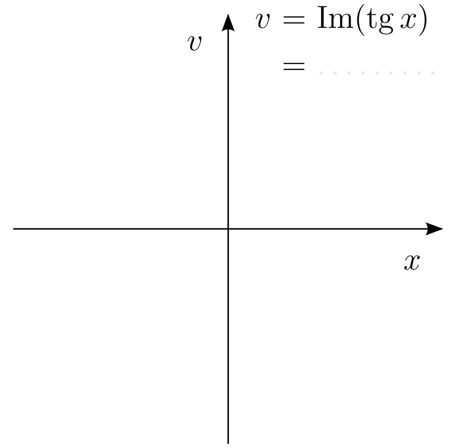
$$\xrightarrow{f\,:\ w\ =\ \cosh z} \qquad \xleftarrow[f^{-1}\,:\ z\ =\ \operatorname{Argcosh} w]{}$$



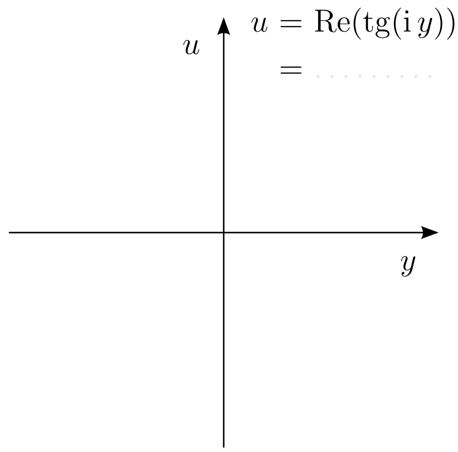
Příklad 9. (graf funkce tangens a kotangens) Načrtněte grafy následujících funkcí:

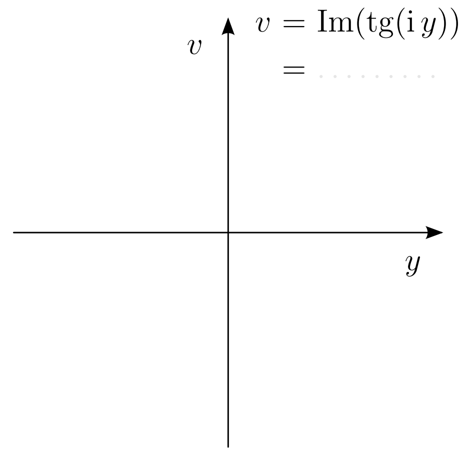


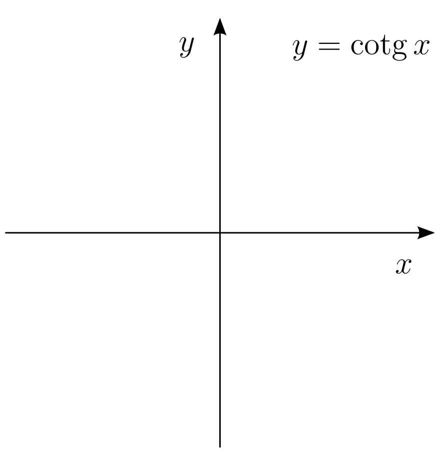


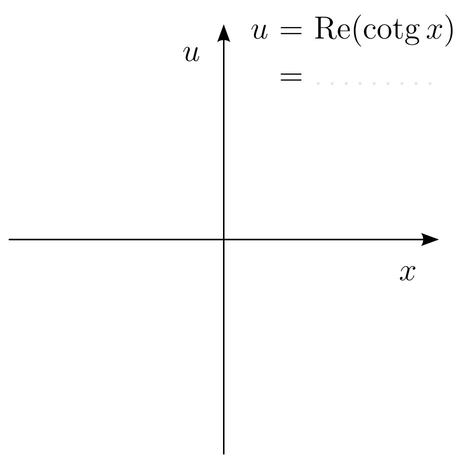


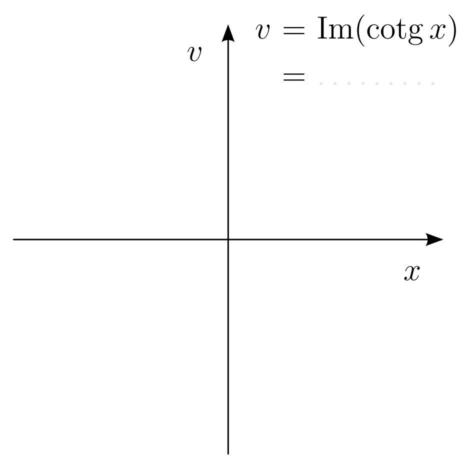
reálná funkce tangens



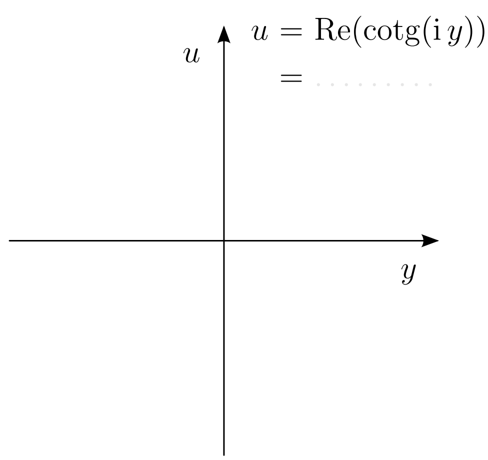


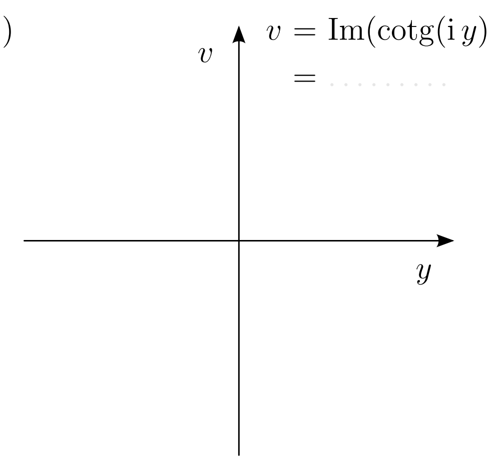






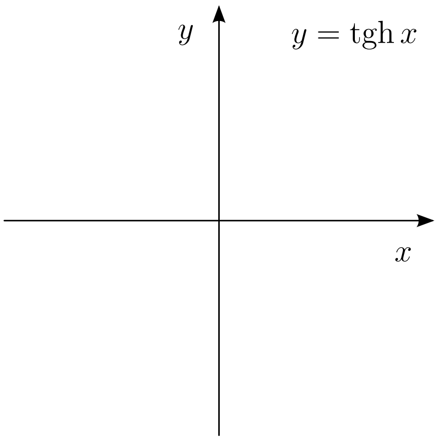
reálná funce kotangens



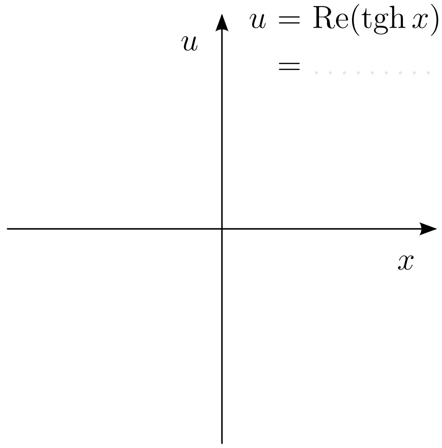


Příklad 10. (graf funkce hyperbolický tangens a kotangens) Načrtněte grafy následujících funkcí:

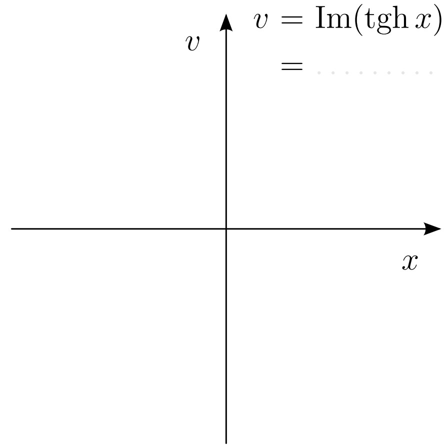
$y = \operatorname{tgh} x$



$u = \operatorname{Re}(\operatorname{tgh} x)$
$= \dots\dots\dots$

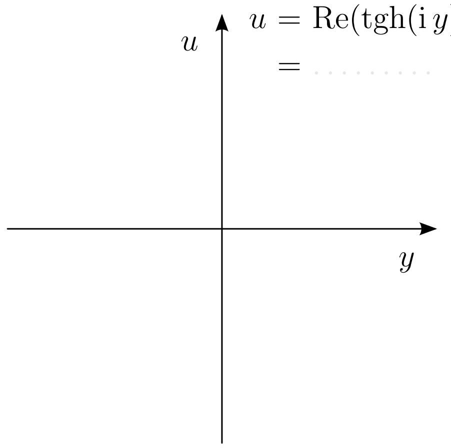


$v = \operatorname{Im}(\operatorname{tgh} x)$
$= \dots\dots\dots$

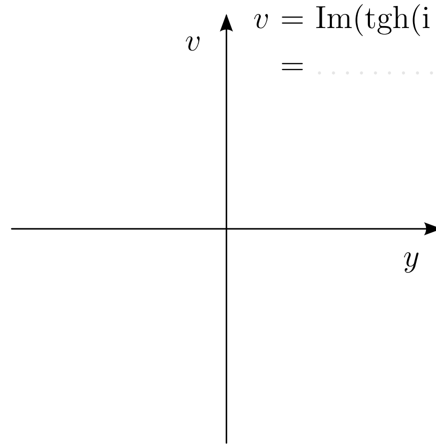


reálná funkce hyperbolický tangens

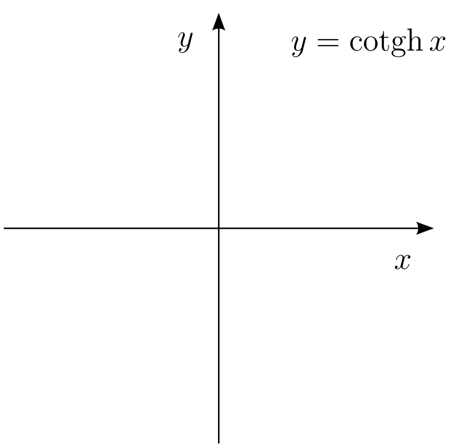
$u = \operatorname{Re}(\operatorname{tgh}(\mathrm{i}\, y))$
$= \dots\dots\dots$



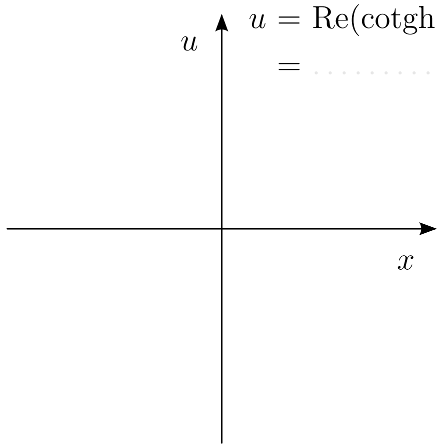
$v = \operatorname{Im}(\operatorname{tgh}(\mathrm{i}\, y))$
$= \dots\dots\dots$



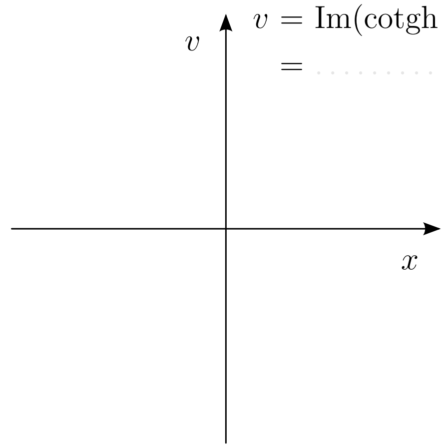
$y = \operatorname{cotgh} x$



$u = \operatorname{Re}(\operatorname{cotgh} x)$
$= \dots\dots\dots$

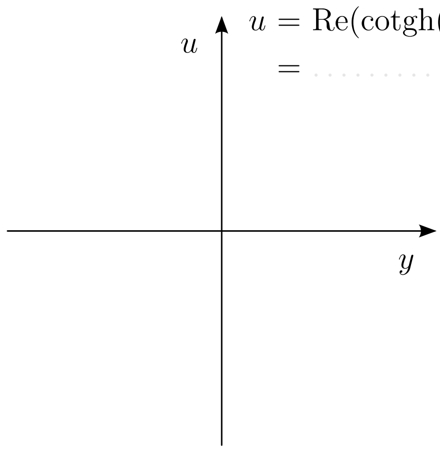


$v = \operatorname{Im}(\operatorname{cotgh} x)$
$= \dots\dots\dots$

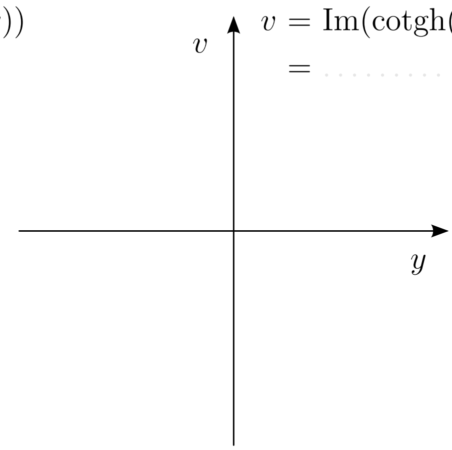


reálná funce hyperbolický kotangens

$u = \operatorname{Re}(\operatorname{cotgh}(\mathrm{i}\, y))$
$= \dots\dots\dots$



$v = \operatorname{Im}(\operatorname{cotgh}(\mathrm{i}\, y))$
$= \dots\dots\dots$



Příklad 11. (hodnoty nekonečněznačných funkcí)
Určete algebraické tvary hodnot funkcí:

$\operatorname{Arcsin} \mathrm{i} =$

$\operatorname{Argcosh} \mathrm{i} =$

$\operatorname{Argtgh} \mathrm{i} =$

Příklad 12. (řešitelnost rovnic v $\mathbb{C}$**)**
Řešte v $\mathbb{C}$ rovnice:

$\sin z = 2$

$\mathrm{e}^{2z} + 2\,\mathrm{e}^{z} - 3 = 0$

$\cos z = \cosh z$