Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (limita funkce) Vypočtěte

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z}{z^2+1} =$$

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{z^2+1} =$$

$$\lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{z^2+3\,\mathrm{i}\,z-2}{z+\mathrm{i}} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\,\mathrm{Im}(z)}{|z|} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{z} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} =$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \sin\frac{1}{|z|} =$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \sin\frac{1}{z} =$$

Příklad 2. (spojitost funkce) Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f:

$f(z) = \overline{z}$

$f(z) = z + \overline{z}$

$f(z) = \operatorname{Re} z$

$f(z) = \mathrm{e}^z$

$f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

$f(z) = \arg z$

$f(z) = \ln z$

$f(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$

Příklad 3. (definice derivace komplexní funkce) S využitím definice derivace funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

určete

1. $f(z) = z^2, \quad f'(\mathrm{i}) =$ .... ,

2. $f(z) = \overline{z}, \quad f'(\mathrm{i}) =$ .... ,

3. $f(z) = |z|, \quad f'(0) =$ ....

Příklad 4. (geometrický význam derivace)

$f(z)$	z	z^2			$\frac{1}{z}$		
$f'(z)$							
z_0	$z_0 \in \mathbb{C}$	1	-1	i	1	-1	i
koeficient roztažnosti funkce f v bodě z_0 $\lvert f'(z_0)\rvert$							
koeficient otočení funkce f v bodě z_0 $\arg f'(z_0)$							

Příklad 5. (Cauchyovy–Riemannovy podmínky)
Zjistěte, zda existuje derivace funkce f v bodě z_0. Pokud ano, určete hodnotu této derivace.

1. $f(z) = z^2 = \dots\dots\dots\dots$, $\quad z_0 = \mathrm{i}$, $\quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0$, $\quad (x_0, y_0) = (\dots\dots, \dots\dots)$,

$$u(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \dots\dots,$$
$$v(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \dots\dots,$$

C.-R. podmínky $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0), \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\dots = \dots\dots, \\ \dots\dots = \dots\dots. \end{cases}$

Jsou funkce u a v diferencovatelné v bodě (x_0, y_0)? $\dots\dots$

$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + \mathrm{i}\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - \mathrm{i}\,u_y(x_0,y_0) = \dots\dots$.

2. $f(z) = \overline{z} = \dots\dots\dots\dots$, $\quad z_0 = \mathrm{i}$, $\quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0$, $\quad (x_0, y_0) = (\dots\dots, \dots\dots)$,

$$u(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \dots\dots,$$
$$v(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \dots\dots,$$

C.-R. podmínky $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0), \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\dots = \dots\dots, \\ \dots\dots = \dots\dots. \end{cases}$

$f'(z_0) = \dots\dots$.

3. $f(z) = |z| = \dots\dots\dots\dots$, $\quad z_0 = 1$, $\quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0$, $\quad (x_0, y_0) = (\dots\dots, \dots\dots)$,

$$u(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \dots\dots,$$
$$v(x,y) = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \dots\dots, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \dots\dots,$$

C.-R. podmínky $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0), \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\dots = \dots\dots, \\ \dots\dots = \dots\dots. \end{cases}$

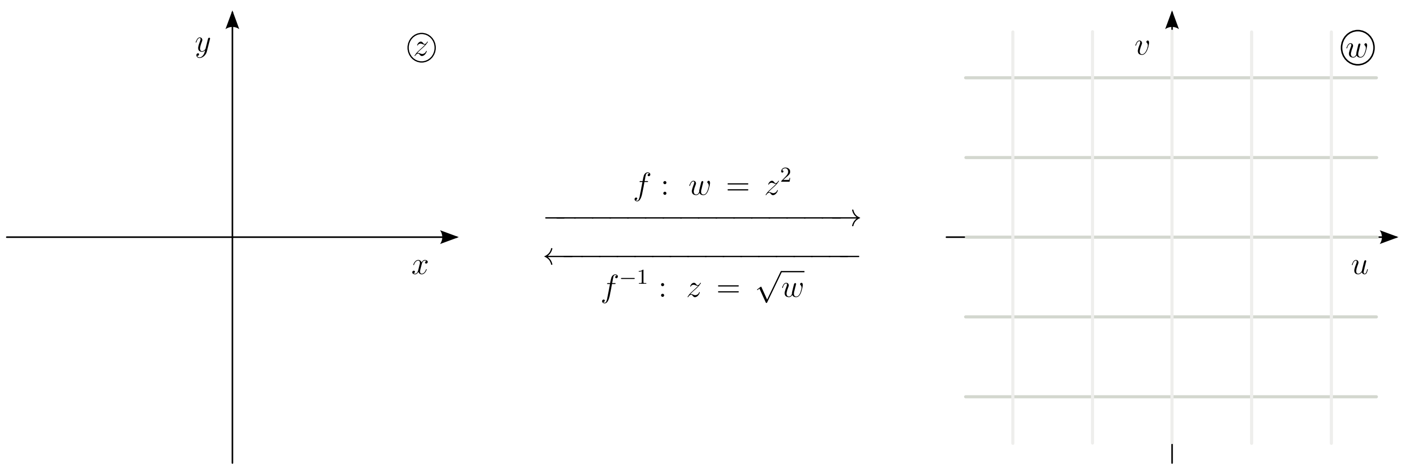
$f'(z_0) = \dots\dots$.

Příklad 6. (geometrický význam Cauchyových–Riemannových podmínek) Určete

$$
\begin{aligned}
w = f(z) = z^2 = u + \mathrm{i}\, v \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
\nabla u \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
\nabla v \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
(\nabla u, \nabla v) \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{aligned}
$$

Zakreslete vzory přímek $u = 0$ a $v = 2$ při zobrazení f. Dále zakreslete ∇u a ∇v v bodech $z = 1+\mathrm{i}$ a $z = -1-\mathrm{i}$.

$$
\begin{aligned}
\nabla u(1,1) \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots , & \nabla u(-1,-1) \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
\nabla v(1,1) \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots , & \nabla v(-1,-1) \quad &= \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{aligned}
$$



Doplňte následující tvrzení:

f splňuje C.-R. podmínky a $f'(z_0) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$

Příklad 7. (holomorfnost funkce v bodě) Rozhodněte, zda je funkce f holomorfní v bodě z_0:

1. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \mathrm{i},$ ....
2. $f(z) = z \operatorname{Re} z, \quad z_0 = 0,$ ....

   ....

   ....
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z_0 = 0,$ ....

   ....
4. $f(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z_0 = \infty,$ ....

   ....

Příklad 8. (spojitost, derivace a holomorfnost)
Rozhodněte, které z následujících implikací jsou pravdivé a které jsou nepravdivé. V případě neplatnosti některé z implikací uveďte vhodný protipříklad.

f má derivaci v $z_0 \in \mathbb{C}$ $\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f je spojitá v $z_0 \in \mathbb{C}$

. . . .

. . . .

f má derivaci v $z_0 \in \mathbb{C}$ $\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f je konečná v $z_0 \in \mathbb{C}$

. . . .

. . . .

f má derivaci v $z_0 \in \mathbb{C}$ $\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f je holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}$

. . . .

. . . .

Příklad 9. (holomorfnost funkce v ∞) Doplňte následující tvrzení:

f je holomorfní v bodě ∞ $\Longrightarrow$ . . . .

Příklad 10. (obor holomorfnosti funkce) Určete obor holomorfnosti funkce f:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ . . . .

   . . . .

   . . . .

2. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1}$ . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

3. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{i}}{\mathrm{e}^z - \mathrm{i}}$ . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

4. $f(z) = z|z|$

5. $f(z) = \left|\operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z\right| + 2\,\mathrm{i}\,|\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z|$