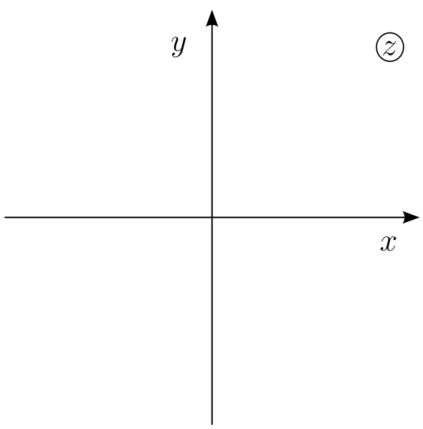
Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (konvergence a divergence číselné řady)
Rozhodněte o konvergenci následujících řad:

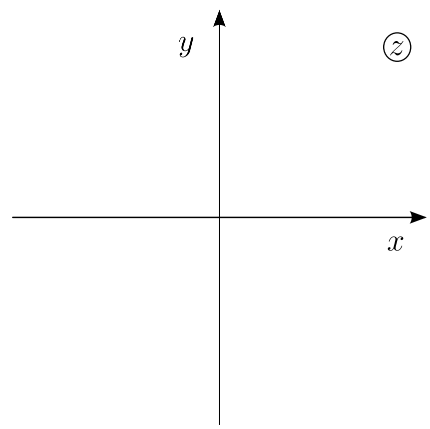
1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i}^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{2^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$,
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\mathrm{i}}{n^2}\right)$,
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}$,
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$,

Příklad 2. (poloměr konvergence a kruh konvergence mocninné řady)
Určete poloměr konvergence R a kruh konvergence $U(z_0, R)$ mocninné řady:

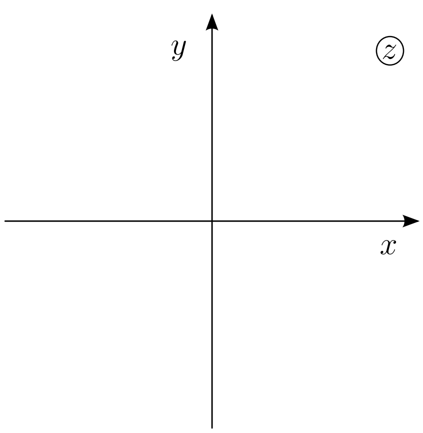
1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$,



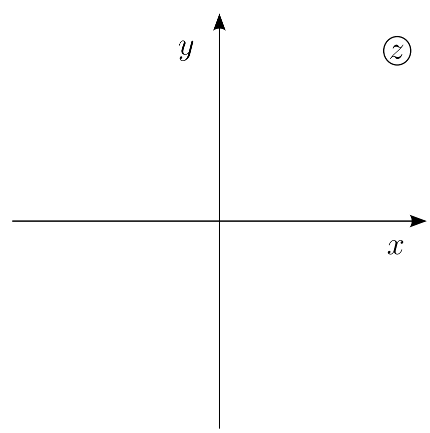
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$,



2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$,

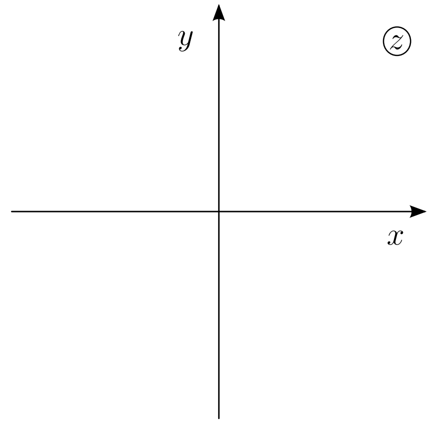


4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n z^n$,

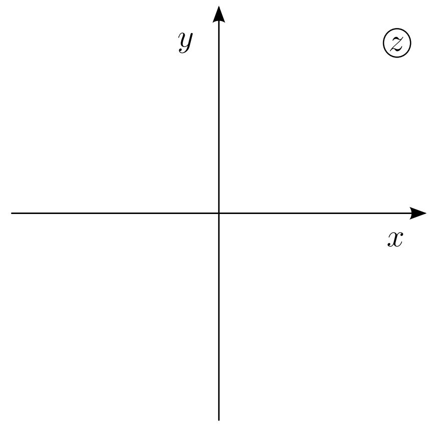


Příklad 3. (součet mocninné řady)
Nalezněte součet mocninné řady v kruhu konvergence:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^n$,

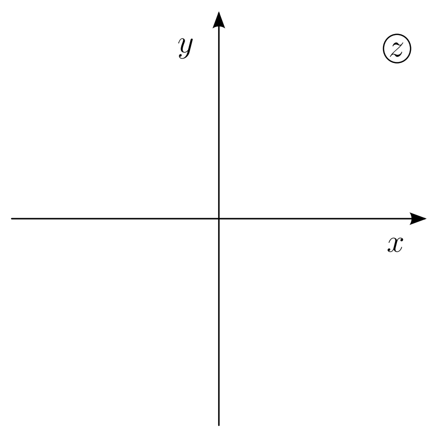


2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$,

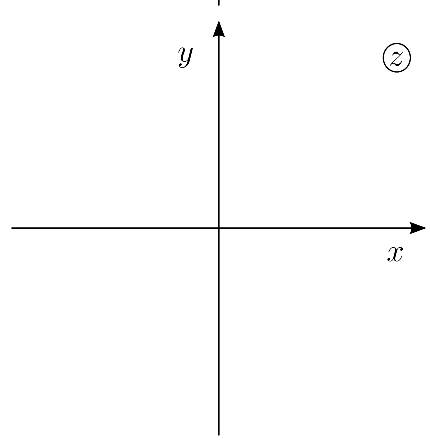


Příklad 4. (Taylorův rozvoj)
Najděte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě z_0 a určete její poloměr konvergence:

1. $f(z) = z^2 + z, \quad z_0 = -1$,

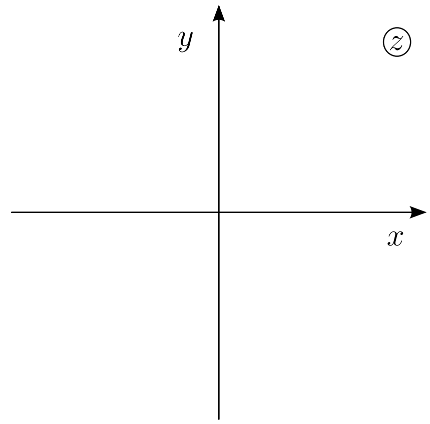


2. $f(z) = \dfrac{z}{z+2}, \quad z_0 = 1$,

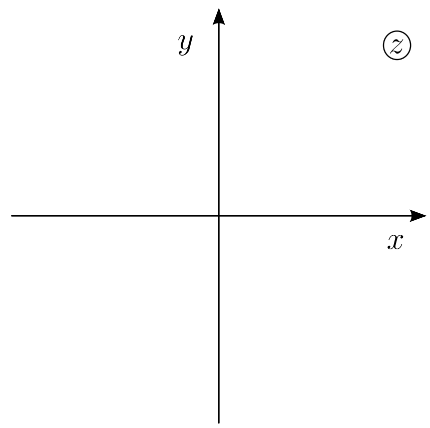


Příklad 5. (konvergence a divergence Laurentovy řady)
Určete poloměry konvergence r a R a mezikruží konvergence $M(z_0, r, R)$ Laurentovy řady:

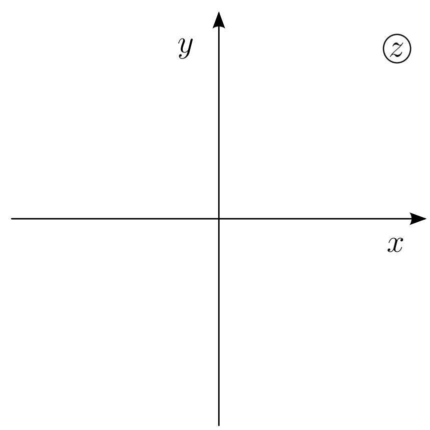
1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$,



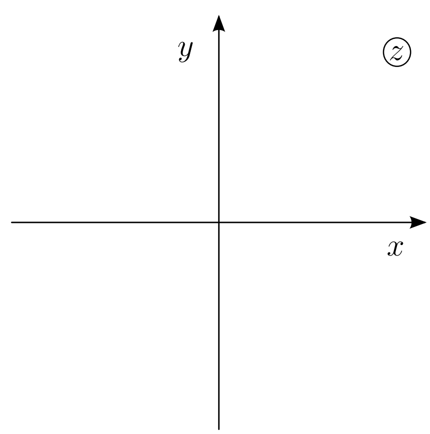
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{-n}}$,



3. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$,

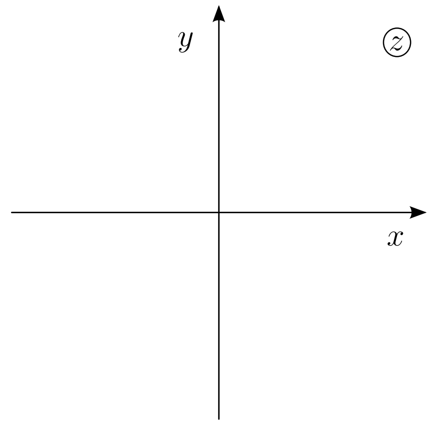


4. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{n^2+1}$,

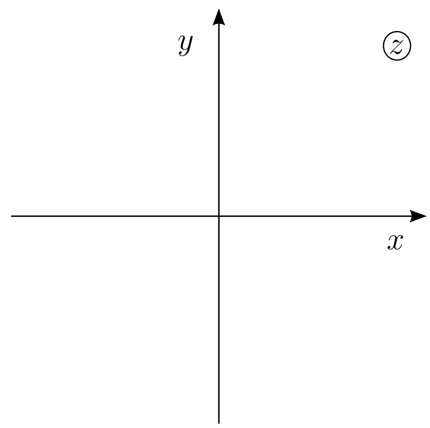


Příklad 6. (Laurentův rozvoj)
Najděte Laurentovu řadu funkce f na daném mezikruží:

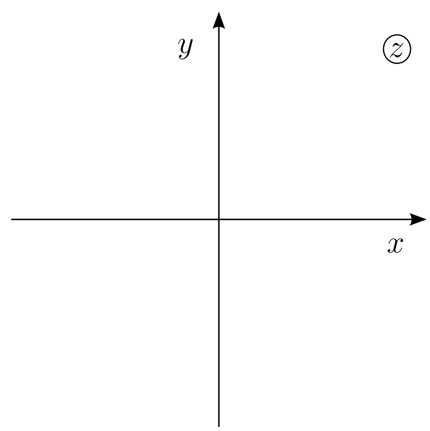
1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}, \quad |z| > 1,$



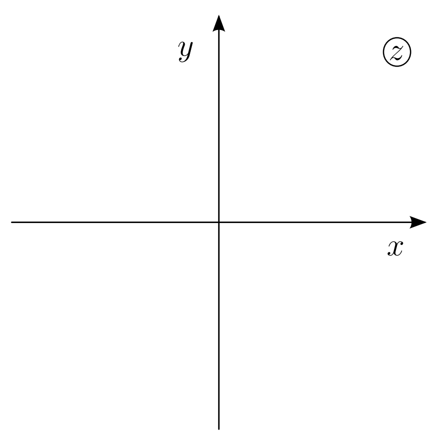
2. $f(z) = \dfrac{1}{2z-5}, \quad |z| > \dfrac{5}{2},$



3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}, \quad 0 < |z-2| < 2,$



4. $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^4}, \quad 0 < |z| < +\infty,$



Příklad 7. (definice rezidua funkce v bodě)

Mějme kladně orientovanou kružnici φ se středem v počátku a poloměrem $r > 0$. Vypočtěte:

1. $\oint\limits_{\varphi} 1 \,\mathrm{d}z =$

2. $\oint\limits_{\varphi} z \,\mathrm{d}z =$

3. $\oint\limits_{\varphi} z^2 \,\mathrm{d}z =$

4. $\oint\limits_{\varphi} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z =$

5. $\oint\limits_{\varphi} \frac{1}{z^2} \,\mathrm{d}z =$

Mějme funkci f, která je rozvinutelná do Laurentovy řady se středem v počátku

$$f(z) = \cdots + a_{-2}\frac{1}{z^2} + a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Určete

$$\oint\limits_{\varphi} f(z) \,\mathrm{d}z =$$

Příklad 8. (určení rezidua pomocí rozvojů v Laurentovy řady)
Určete reziduum funkce f ve všech singulárních bodech této funkce:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

4. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

5. $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$

Příklad 9. (výpočet rezidua v odstranitelné singularitě, v pólu a v podstatné singularitě)
Určete reziduum funkce f ve všech singulárních bodech této funkce:

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

3. $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$

Příklad 10. (výpočet křivkového integrálu pomocí reziduí)
Vypočtěte:

1. $\displaystyle\oint_{\varphi} \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z$, kde φ je uzavřená křivka obsahující body ± 1 ve svém vnitřku a bod 3 ve vnějšku,

2. $\displaystyle\oint_{\varphi} \frac{1}{z^5(z^{10}-2)}\,\mathrm{d}z, \qquad$ kde $\varphi: \ |z| = 2$,