Kapitola 1. Komplexní čísla

Definice 1.1. (komplexní číslo)

Komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel:

$$z = [x, y].$$

Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Reálné číslo x nazýváme **reálná část komplexního čísla** $x = \operatorname{Re} z$ a reálné číslo y nazýváme **imaginární část komplexního čísla** $y = \operatorname{Im} z$.

Komplexní číslo $[0, 1]$ nazýváme **imaginární jednotka**

$$\mathrm{i} = [0, 1].$$

Klasifikace komplexních čísel:

i) $z = [x, y]$ je **reálné číslo**, pokud $y = 0$ (tj. $z = [x, 0]$),

ii) $z = [x, y]$ je **imaginární číslo**, pokud $y \neq 0$,

iii) $z = [x, y]$ je **ryze imaginární číslo**, pokud $y \neq 0$ a $x = 0$ (tj. $z = [0, y]$).

Komplexní čísla se rovnají ($z_1 = z_2$), pokud se rovnají jejich reálné a imaginární části.

Definice 1.2. (součet komplexních čísel)

Nechť $z_1 = [x_1, y_1]$ a $z_2 = [x_2, y_2]$ jsou komplexní čísla, pak **součtem** těchto **komplexních čísel** nazveme číslo

$$z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2].$$

Definice 1.3. (součin komplexních čísel)

Nechť $z_1 = [x_1, y_1]$ a $z_2 = [x_2, y_2]$ jsou komplexní čísla, pak **součinem** těchto **komplexních čísel** nazveme číslo

$$z_1 \cdot z_2 = [x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1].$$

Věta 1.4. (**základní vlastnosti komplexních čísel**)

i) Každé komplexní číslo lze geometricky znázornit v komplexní Gaussově rovině.

ii) Pro i platí $\mathrm{i}^2 = -1$.

iii) Každé komplexní číslo lze vyjádřit v algebraickém tvaru $z = x + \mathrm{i}\, y$, kde x a y jsou reálná čísla.

iv) Každé komplexní číslo kromě nuly $[0,0]$ lze vyjádřit v goniometrickém (polárním) tvaru

$$z = r\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

v) Pokud využijeme Eulerovu identitu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

lze každé komplexní číslo kromě nuly $[0,0]$ vyjádřit v exponenciálním tvaru

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}.$$

Věta 1.5. (**algebraické vlastnosti komplexních čísel**)

Prostor $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Definice 1.6. (**komplexně sdružené číslo**)

Nechť $z = [x, y]$ je komplexní číslo, pak **komplexně sdruženým číslem** nazveme číslo $\overline{z} = [x, -y]$.

Věta 1.7. (**vlastnosti komplexně sdruženého čísla**)

Pro všechna $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

i) $\overline{\overline{z}} = z$,

ii) z je reálné $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$,

iii) $x = \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ a $y = \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$,

iv) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

v) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

vi) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ pro $z_2 \neq 0$,

vii) $\overline{z} \cdot z \in \mathbb{R}$.

Definice 1.8. (**absolutní hodnota komplexního čísla**)

Nechť $z = [x, y]$ je komplexní číslo, pak **absolutní hodnotou komplexního čísla** nazveme reálné číslo

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Věta 1.9. (vlastnosti absolutní hodnoty)

Pro všechna $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

i) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

ii) $|z| = |-z|$,

iii) $|z| = |\overline{z}|$,

iv) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

v) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ pro $z_2 \neq 0$,

vii) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Definice 1.10. (argument komplexního čísla)

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak **argumentem komplexního čísla** z nazveme množinu

$$\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R} : \; z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\}.$$

Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existuje právě jedna hodnota $\alpha \in \operatorname{Arg} z$, pro niž je $-\pi < \alpha \leq \pi$; tuto hodnotu nazveme **hlavní hodnota argumentu komplexního čísla** z a značíme

$$\arg z.$$

Věta 1.11. (vlastnosti argumentu komplexního čísla)

Pro všechna $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

i) $\operatorname{Arg} \dfrac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z$,

ii) $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$,

iii) $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$,

iv) $\operatorname{Arg} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

Definice 1.12. (n-tá mocnina komplexního čísla)

Mocninu komplexního čísla z^n pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definujeme rekurentně pomocí násobení

$$z^0 = [1, 0], \quad z^n = z^{n-1} \cdot z.$$

Definice 1.13. (n-tá odmocnina komplexního čísla)

Odmocninu komplexního čísla $\sqrt[n]{z}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definujeme jako množinu

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : \; w^n = z\} .$$

Věta 1.14. (vlastnosti mocniny a odmocniny komplexního čísla)

Pro n-tou mocninu a odmocninu komplexního čísla $z = |z|\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ v exponenciálním a goniometrickém tvaru platí

i) $z^n = |z|^n\,(\cos n\alpha + \mathrm{i}\,\sin n\alpha) = |z|^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\alpha}$,

ii) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$, kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definice 1.15. (rozšířený obor komplexních čísel)

Obor komplexních čísel $\mathbb{C}$ doplněný o prvek ∞, tj. množina

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

se nazývá **rozšířený obor komplexních čísel**.

Prostor $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nazýváme **uzavřenou (rozšířenou) Gaussovou rovinou**.

Definice 1.16. (algebraické vlastnosti prvku ∞)

Pro nevlastní komplexní číslo $\infty \in \mathbb{C}^*$ definujeme

i) $\mathrm{Re}\,\infty = \infty$, $\quad\mathrm{Im}\,\infty = 0$, $\quad\overline{\infty} = \infty$, $\quad|\infty| = \infty$,

ii) $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$,

iii) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\quad\infty \cdot \infty = \infty$,

iv) $\dfrac{z}{\infty} = 0$ a $\dfrac{\infty}{z} = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$, $\quad\dfrac{z}{0} = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

v) $\infty^n = 0^{-n} = \infty$, $\quad\infty^{-n} = 0^n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

vi) $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

vii) $0^0 = \infty^0 = 1$.