Kapitola 2. Posloupnosti a řady

Definice 2.1. (posloupnost komplexních čísel)

Posloupnost komplexních čísel v $\mathbb{C}$ je zobrazení,
jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot množina $H \subset \mathbb{C}$.

$$\text{píšeme:} \qquad (z_n), \quad (z_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (z_1, z_2, z_3, \dots)$$

Číslu n říkáme **index prvku** a číslu z_n **n-tý člen posloupnosti**.

Definice 2.2. (omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost komplexních čísel (z_n) je **omezená** v $\mathbb{C}$, pokud

$$\exists\, K > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ |z_n| \le K.$$

Věta 2.3. (nutná a postačující podmínka omezenosti posloupnosti)

Posloupnost komplexních čísel $(z_n) = (x_n + \mathrm{i}\, y_n)$ je omezená v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou omezené obě reálné posloupnosti (x_n) a (y_n) v $\mathbb{R}$.

Definice 2.4. (limita posloupnosti)

Řekneme, že posloupnost komplexních čísel (z_n) je **konvergentní** v $\mathbb{C}$, pokud

$$\exists\, c \in \mathbb{C}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ n > n_0 \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon.$$

Komplexní číslo c nazveme **limitou** posloupnosti (z_n) a píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = c \qquad \text{nebo} \qquad z_n \to c.$$

Řekneme, že posloupnost komplexních čísel (z_n) je **divergentní** v $\mathbb{C}$, pokud není v $\mathbb{C}$ konvergentní.
Limita divergentní posloupnosti neexistuje.

Věta 2.5. (nutná a postačující podmínka konvergence posloupnosti)

Posloupnost komplexních čísel $(z_n) = (x_n + \mathrm{i}\, y_n)$ je konvergentní v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou konvergentní obě reálné posloupnosti (x_n) a (y_n) v $\mathbb{R}$.

Definice 2.6. (hromadný bod)

Číslo $c \in \mathbb{C}$ je **hromadný bod** posloupnosti komplexních čísel (z_n), pokud existuje podposloupnost (z_{k_n}) posloupnosti (z_n), pro kterou platí

$$\lim_{n \to +\infty} z_{k_n} = c.$$

Věta 2.7. (vlastnosti konvergentních posloupností)

i) Každá posloupnost komplexních čísel má v $\mathbb{C}$ nejvýše jednu limitu.

ii) Každá podposloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti komplexních čísel v $\mathbb{C}$ je také konvergentní v $\mathbb{C}$ a má stejnou limitu.

iii) Každá konvergentní posloupnost komplexních čísel v $\mathbb{C}$ je *omezená*.

iv) Z každé *omezené* posloupnosti komplexních čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost v $\mathbb{C}$ (*Bolzano-Weierstrassova věta*).

v) Mějme *omezenou* posloupnost komplexních čísel (z_n).
Posloupnost (z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když (z_n) má v $\mathbb{C}$ právě jeden hromadný bod.

vi) Jestliže $z_n \longrightarrow c$ a $w_n \longrightarrow d$ v $\mathbb{C}$, potom

(a) $z_n \pm w_n \longrightarrow c \pm d$ v $\mathbb{C}$,

(b) $z_n \cdot w_n \longrightarrow c \cdot d$ v $\mathbb{C}$,

(c) $\dfrac{z_n}{w_n} \longrightarrow \dfrac{c}{d}$ v $\mathbb{C}$, pokud $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ w_n \neq 0$ a $d \neq 0$,

(d) $|z_n| \longrightarrow |c|$ v $\mathbb{R}$.

Definice 2.8. (cauchyovská posloupnost)

Posloupnost komplexních čísel (z_n) se nazývá **cauchyovská** (**fundamentální**) v $\mathbb{C}$, pokud platí

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N} : n > n_0\ \wedge\ m > n_0\ \Rightarrow\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.9. (Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence)

Posloupnost komplexních čísel je konvergentní v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když je cauchyovská v $\mathbb{C}$.

Definice 2.10. (limita posloupnosti v C*)

Řekneme, že posloupnost komplexních čísel (z_n) je **konvergentní** v $\mathbb{C}^*$, pokud

$$\exists\, c \in \mathbb{C}^*\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \Rightarrow z_n \in U(c, \varepsilon),$$

kde

$$U(c,\varepsilon) := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} :\ |z - c| < \varepsilon\} & \text{pro } c \in \mathbb{C}, \\ \left\{z \in \mathbb{C}^* :\ |z| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\} & \text{pro } c = \infty. \end{cases}$$

Komplexní číslo c nazveme **limitou** posloupnosti (z_n) v $\mathbb{C}^*$ a píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = c \quad \text{v } \mathbb{C}^* \qquad \text{nebo} \qquad z_n \to c \quad \text{v } \mathbb{C}^*.$$

Řekneme, že posloupnost komplexních čísel (z_n) je **divergentní** v $\mathbb{C}^*$, pokud není v $\mathbb{C}^*$ konvergentní.
Limita divergentní posloupnosti neexistuje.

Věta 2.11. (vlastnosti konvergentních posloupností v C*)

i) Každá posloupnost komplexních čísel má v $\mathbb{C}^*$ nejvýše jednu limitu.

ii) Každá podposloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti komplexních čísel v $\mathbb{C}^*$ je také konvergentní v $\mathbb{C}^*$ a má stejnou limitu.

iii) Z každé posloupnosti komplexních čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost v $\mathbb{C}^*$ (*Bolzano-Weierstrassova věta*).

iv) Posloupnost komplexních čísel (z_n) je konvergentní v $\mathbb{C}^*$ právě tehdy, když (z_n) má v $\mathbb{C}^*$ právě jeden hromadný bod.

v) Jestliže $z_n \longrightarrow c$ a $w_n \longrightarrow d$ v $\mathbb{C}^*$, potom

(a) $z_n \pm w_n \longrightarrow c \pm d$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $\infty \pm \infty$,

(b) $z_n \cdot w_n \longrightarrow c \cdot d$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $0 \cdot \infty$ nebo $\infty \cdot 0$,

(c) $\dfrac{z_n}{w_n} \longrightarrow \dfrac{c}{d}$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$,

(d) $|z_n| \longrightarrow |c|$ v $\mathbb{R}^*$.

vi) $z_n \longrightarrow \infty$ v $\mathbb{C}^* \quad \Leftrightarrow \quad |z_n| \longrightarrow +\infty$ v $\mathbb{R}^*$.

Definice 2.12. (komplexní řada)

Mějme posloupnost **konečných** komplexních čísel (z_n).

Řada komplexních čísel (**komplexní řada**) je symbol $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$

Posloupnost částečných součtů řady je posloupnost (s_n), kde

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 \\ s_2 &= z_1 + z_2 \\ s_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ s_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Číslo z_n se nazývá **n-tý člen řady**, číslo $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ je **n-tý částečný součet řady**.

$$\left(\textit{nemůže-li dojít k záměně, připouštíme zápis} \quad \sum z_n \right)$$

Definice 2.13. (konvergentní a divergentní řada)

Komplexní řadu $\sum z_n$ nazveme **konvergentní**, je-li konvergentní v $\mathbb{C}$ její posloupnost částečných součtů (s_n).

$$\text{píšeme:} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = s, \quad \text{kde } s \text{ nazýváme } \textbf{součet řady}$$

Komplexní řadu $\sum z_n$ nazveme **divergentní**, je-li divergentní v $\mathbb{C}$ její posloupnost částečných součtů (s_n).

$$\text{píšeme:} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ diverguje}, \qquad \text{případně} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty$$

Věta 2.14. (vlastnosti konvergentních řad)

i) Řada $\sum z_n$ je konvergentní v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou konvergentní v $\mathbb{R}$ řady $\sum \operatorname{Re} z_n$ a $\sum \operatorname{Im} z_n$.

ii) Jestliže $\sum z_n = s_1$ a $\sum w_n = s_2$ jsou konvergentní komplexní řady, potom

$$\sum \big(\alpha\, z_n + \beta\, w_n\big) = \alpha \sum z_n + \beta \sum w_n = \alpha\, s_1 + \beta\, s_2, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

iii) Je-li komplexní řada $\sum z_n$ konvergentní, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$
(nutná podmínka konvergence).

Věta 2.15. (Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence)

Komplexní řada $\sum z_n$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \;\Rightarrow\; |z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Definice 2.16. (absolutně konvergentní řada)

Komplexní řada $\sum z_n$ se nazývá **absolutně konvergentní**, pokud konverguje v $\mathbb{R}$ řada $\sum |z_n|$.

Komplexní řada $\sum z_n$ se nazývá **relativně** (**neabsolutně**) **konvergentní**, pokud $\sum z_n$ konverguje v $\mathbb{C}$, ale $\sum |z_n|$ diverguje v $\mathbb{R}$.

Věta 2.17. (vlastnosti absolutně konvergentních řad)

i) Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

ii) Libovolné přerovnání členů absolutně konvergentní komplexní řady nemá vliv na její konvergenci ani součet.

iii) Jestliže $\sum z_n = s_1$ a $\sum w_n = s_2$ jsou absolutně konvergentní komplexní řady, pak také řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_1 w_n + z_2 w_{n-1} + \cdots + z_n w_1)$$

je absolutně konvergentní a její součet je $s_1 \cdot s_2$.